

## Глава 5

# Акустооптическая ячейка как фильтр пространственных частот

К настоящему времени в литературе описано большое количество различных акустооптических устройств, отличающихся назначением, конструкцией, принципом действия. Но, несмотря на все их разнообразие, они имеют и много общего, поскольку основу этих устройств составляет так называемая акустооптическая ячейка — образец из прозрачного кристаллического или стеклообразного материала (или кювета с жидкостью), в котором с помощью пьезопреобразователя возбуждается акустическая волна. Проходящий через ячейку свет дифрагирует в акустическом поле. При этом в дифрагированный пучок переносится информация, содержащаяся как в падающей световой волне, так и в электрическом сигнале.

В данной главе на основе спектрального метода Фурье будут сформулированы некоторые общие пояснения, характеризующие работу акустооптической ячейки, вне зависимости от ее конкретного назначения [128]. Такой подход позволяет лучше понять работу акустооптических устройств, а главное — существенно облегчает расчет сложных систем, содержащих акустооптические элементы.

### 5.1 Дифракция пространственно-модулированной световой волны на акустическом пучке произвольного спектрального состава

Задача взаимодействия световых и акустических волн, имеющих произвольную пространственную и временную структуру, была в общей постановке рассмотрена в § 2.6. В данном разделе мы получим более простые, приближенные соотношения, которые в дальнейшем будут использоваться при анализе акустооптических устройств.

Будем, как и раньше, считать, что акустическая волна, распространяющаяся по оси  $z$ , заключена в объеме, ограниченном плоскостями  $x = 0$  и  $x = l$ , а монохроматический световой пучок падает на область взаимодействия под углом  $\theta_0$  в плоскости  $xz$ . Световое поле на входе ячейки (в плоскости  $x = 0$ )

описывается в общем случае комплексной функцией  $u_{ex}(z)$ , отражающей пространственную структуру падающего света<sup>1</sup>. Разложим поле  $u_{ex}(z)$  в спектр по плоским волнам [127, 156]:

$$U_{ex}(\theta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ex}(z) \exp(-jk_i \sin \theta_i z) dz. \quad (5.1.1)$$

Для спектра акустического поля  $a(z)$  можно записать

$$A(K) = \int_{-\infty}^{\infty} a(z) \exp(-jKz) dz. \quad (5.1.2)$$

Каждая компонента светового пучка (5.1.1), проходя через ячейку, дифрагирует на каждой монохроматической составляющей акустического пучка (5.1.2). При малой эффективности взаимодействия всеми высшими дифракционными порядками можно пренебречь, а для волн первого порядка воспользоваться приближенным соотношением (2.4.13). Тогда, учитывая (2.1.7), для каждой парциальной дифрагированной волны на выходе ячейки (в плоскости  $x = l$ ) имеем

$$U_{vblx}(\theta_i, K) = U_{ex}(\theta_i) \frac{q^* l}{2} A(K) \exp[j\eta(\theta_i, K)l/2] \times \\ \times \text{sinc}[\eta(\theta_i, K)l/2\pi] \exp(jk_d \cos \theta_d l), \quad (5.1.3)$$

где  $q^* = \pi n^3 p_e / \lambda$ . Выражение (5.1.3) определяет амплитуды волн в +1-ом и -1-ом порядках дифракции. Но поскольку в акустооптических устройствах рабочим является обычно один из них, то для определенности в дальнейшем будем рассматривать +1-ый порядок. Учитывая связь между углами  $\theta_i$  и  $\theta_d$ :  $k_i \sin \theta_i + K = k_d \sin \theta_d$ , функцию  $U_{vblx}$  можно записать в виде  $U_{vblx}(\theta_i, \theta_d)$ . В такой форме эта функция описывает угловое распределение дифрагированного света, который рождается при прохождении через акустическое поле отдельной спектральной составляющей (5.1.1), падающей на ячейку под углом  $\theta_i$ . Полное решение дифракционной задачи получим, просуммировав все парциальные волны (5.1.3):

$$U_{vblx}(\theta_d) = \frac{q^* l}{2} \frac{k_i}{2\pi} \exp(jk_d \cos \theta_d l) \int_{-\infty}^{\infty} U_{ex}(\theta_i) \exp \left[ j \frac{\eta(\theta_i, \theta_d) l}{2} \right] \times \\ \times \text{sinc} \frac{\eta(\theta_i, \theta_d) l}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(K) \delta(k_d \sin \theta_d - k_i \sin \theta_i - K) dK d\theta_i. \quad (5.1.4)$$

<sup>1</sup>Предположение об одномерности поля  $u_{ex}(z)$  не ограничивает существенно общности рассмотрения, поскольку акустооптические устройства как системы оптической обработки информации, по существу, являются одномерными. В акустическом поле есть лишь одно выделенное направление — ось  $z$ , вдоль которого можно осуществлять управляемое воздействие на световую волну. Поэтому все важнейшие характеристики устройств определяются особенностями акустооптического взаимодействия в плоскости  $xz$ .

Выражение (5.1.4) можно существенно упростить, если спектры  $U_{вх}(\theta_i)$  и  $U_{вых}(\theta_d)$  привести к центральной плоскости ячейки  $x = l/2$ . Обозначая

$$U_i(\theta_i) = U_{вх}(\theta_i)H_s(\theta_i, l/2); \quad U_d(\theta_d) = U_{вых}(\theta_d)H_s^{-1}(\theta_d, l/2), \quad (5.1.5)$$

где

$$H_s(\theta, x) = \exp(jk \cos \theta x) \quad (5.1.6)$$

— передаточная функция свободного пространства [127], получаем (5.1.4) в виде [128]

$$U_d(\theta_d) = \frac{q^*l}{2} \frac{k_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_i(\theta_i) \operatorname{sinc} \frac{\eta(\theta_i, \theta_d)l}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} A(K) \delta(k_d \sin \theta_d - k_i \sin \theta_i - K) dK d\theta_i. \quad (5.1.7)$$

Спектральные функции  $U_i$  и  $U_d$  связаны с амплитудами световых полей  $u_i$  и  $u_d$  в центре ячейки соотношениями

$$U_i(\theta_i) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(z) \exp(-jk_i \sin \theta_i z) dz; \\ U_d(\theta_d) = \int_{-\infty}^{\infty} u_d(z) \exp(-jk_d \sin \theta_d z) dz. \quad (5.1.8)$$

Зная угловой спектр (5.1.7), можно рассчитать поле дифрагированного света на любом расстоянии от ячейки. Для этого надо  $U_d(\theta_d)$  умножить на соответствующую передаточную функцию  $H_s$  и от полученного выражения взять обратное преобразование Фурье. Наиболее простой результат получается в дальней зоне дифракции (или в фокальной плоскости линзы, расположенной на выходе ячейки), где распределение амплитуды дифрагированного света с точностью до несущественного множителя совпадает с (5.1.7) [127].

Основное ограничение, которое было использовано при выводе (5.1.7), — это предположение о малой эффективности дифракции, позволившее применить для светового и акустического полей принцип суперпозиции. Как будет показано в дальнейшем, для описания работы акустооптических устройств этого приближения обычно оказывается достаточно. В остальном выражение (5.1.7) является весьма общим. Оно справедливо в любой области дифракции (раман-натовской, брэгговской и, что особенно важно — промежуточной) и при любом типе взаимодействия (изотропной и анизотропной дифракции). Последнее вытекает из того, что условие фазового синхронизма для анизотропной дифракции (3.3.1) содержит как частный случай при  $n_i = n_d$  также и условие фазового синхронизма для изотропной дифракции.

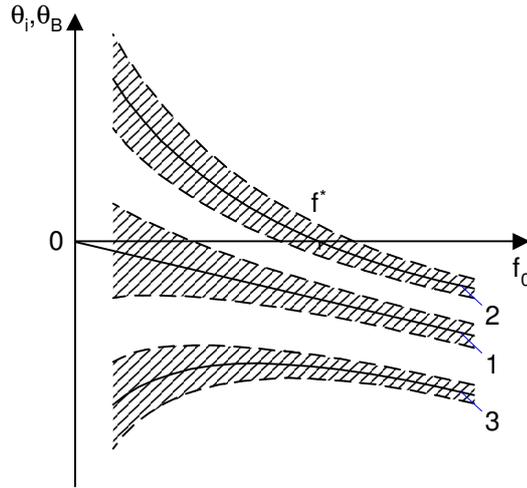


Рис. 5.1. Зависимость угла Брэгга от частоты ультразвука при  $n_i, n_d = \text{const}$ :  
 1 —  $n_i = n_d$ ;    2 —  $n_i < n_d$ ;    3 —  $n_i > n_d$

Во всех акустооптических устройствах, кроме фильтров, используется геометрия взаимодействия, близкая к ортогональной, и углы  $\theta_i$ ,  $\theta_d$  не превышают, как правило, десятка градусов. Для этих случаев, учитывая, что  $|n_i - n_d| \ll n_i, n_d$ , можно записать

$$\eta(\theta_i, \theta_d) \approx \frac{2\pi}{\lambda} (n_i - n_d) + \frac{\pi n}{\lambda} (\theta_d^2 - \theta_i^2); \quad \theta_d \approx \theta_i + \frac{\lambda}{n\Lambda}, \quad (5.1.9)$$

где  $n$  — среднее значение показателя преломления анизотропной среды. Выражение для  $\eta$  может быть также представлено в виде

$$\eta(\theta_i, K) \approx \frac{2\pi}{\lambda} (n_i - n_d) + K \left( \theta_i + \frac{\lambda K}{4\pi n} \right) = K(\theta_i - \theta_B), \quad (5.1.10)$$

где

$$\theta_B = -\frac{\lambda f}{2nv} - \frac{v}{\lambda f} (n_i - n_d). \quad (5.1.11)$$

Описываемая (5.1.11) частотная зависимость угла Брэгга при  $n_i, n_d = \text{const}$  показана на рис. 5.1.

## 5.2 Передаточная функция акустооптической ячейки

Многие оптические системы при вполне естественных ограничениях можно считать линейными. Допущение о линейности системы существенно упрощает ее расчет. Для линейной системы достаточно знать ее отклик на некоторые простые входные возмущения, чтобы, пользуясь принципом суперпозиции, сразу получить решение задачи о прохождении через систему сигнала произвольного

вида. В качестве таких простых возмущений обычно используются импульсный или гармонический сигналы. В первом случае мы приходим к следующему выражению, связывающему входной  $u_1(z)$  и выходной  $u_2(z)$  сигналы [127]:

$$u_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(z_1)h(z_1, z_2) dz_1. \quad (5.2.1)$$

Функция  $h(z_1, z_2)$ , которая носит название импульсного отклика, по физическому смыслу представляет собой распределение светового поля на выходе системы от расположенного на входе в точке  $z_1$  источника света. Для пространственно-инвариантных систем выражение (5.2.1) превращается в свертку

$$u_2(z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(z_1)h(z_2 - z_1) dz_1. \quad (5.2.2)$$

Выполняя над (5.2.2) преобразование Фурье, получаем

$$U_2(\theta) = U_1(\theta)H(\theta), \quad (5.2.3)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — пространственные спектры сигналов  $u_1$  и  $u_2$ ,  $H$  — передаточная функция системы. Таким образом, расчет системы сводится к нахождению либо импульсного отклика  $h$ , либо его Фурье-образа  $H$ .

Ниже будет показано, что в ряде случаев акустооптическую ячейку можно описывать как линейную систему с передаточной функцией, зависящей от структуры акустического поля и геометрии акустооптического взаимодействия [128].

**Малая эффективность дифракции.** Рассмотрим сначала случай, когда в ячейке распространяется монохроматическая упругая волна<sup>2</sup>

$$a(z, t) = a_0 \exp[j(K_0 z - \Omega_0 t)]. \quad (5.2.4)$$

Спектр акустического поля при этом содержит только одну составляющую

$$A(K) = 2\pi a_0 \exp(-j\Omega_0 t)\delta(K_0 - K). \quad (5.2.5)$$

Подставляя (5.2.5) в (5.1.7) и учитывая (5.1.9), (5.1.10), получаем следующее выражение для углового спектра дифрагированного света

$$U_d(\theta_d) = \exp(-j\Omega_0 t) \int_{-\infty}^{\infty} U_i(\theta_i)T(\theta_i)\delta\left(\theta_d - \frac{\lambda K_0}{2\pi n} - \theta_i\right) d\theta_i, \quad (5.2.6)$$

где

$$T(\theta_i) = \frac{ql}{2} \operatorname{sinc} \frac{\eta l}{2\pi} = \frac{ql}{2} \operatorname{sinc} \left[ \frac{K_0 l}{2\pi} (\theta_i - \theta_B) \right]. \quad (5.2.7)$$

<sup>2</sup>Для упрощения выкладок здесь  $a(z, t)$  записано в форме аналитической функции.

Соотношение (5.2.6) позволяет рассматривать ячейку как линейную оптическую систему с передаточной функцией  $T$ . Особенность этой системы заключается в том, что она не только осуществляет пространственную фильтрацию оптического сигнала, но также смещает весь его спектр в целом по оси временных частот  $\omega$  на величину  $\Omega_0$  и по оси пространственных частот  $f_z = \theta_i/\lambda$  на величину  $K_0/2\pi = \Lambda_0^{-1}$ . Функция  $T$  является действительной. Всюду в полосе пропускания она положительна. Это означает, что ячейка не вносит каких-либо фазовых искажений в спектр оптического сигнала.

Расчет акустооптических устройств нередко приходится выполнять численно с помощью ЭВМ. В таких случаях удобнее пользоваться безразмерными величинами, так как это позволяет даже при численном расчете получать общие результаты, не зависящие от выбора акустооптического материала и параметров ячейки. Так, если пронормировать углы  $\theta_i$ ,  $\theta_d$  и  $\theta_B$  на модуль угла Брэгга при изотропной дифракции, т.е. ввести

$$\Theta_i = \frac{2nv}{\lambda f_0} \theta_i; \quad \Theta_d = \frac{2nv}{\lambda f_0} \theta_d; \quad \Theta_B = \frac{2nv}{\lambda f_0} \theta_B, \quad (5.2.8)$$

то выражение (5.2.7) примет вид

$$T(\Theta_i) = \frac{ql}{2} \operatorname{sinc} \left[ \frac{Q}{2} (\Theta_i - \Theta_B) \right], \quad (5.2.9)$$

где

$$Q = (\lambda l / nv^2) f_0^2. \quad (5.2.10)$$

Отметим, что изотропной дифракции соответствует только одно значение нормированного угла Брэгга:  $\Theta_B = -1$ . Все другие значения  $\Theta_B$  могут быть получены лишь при использовании анизотропной дифракции с различной геометрией взаимодействия. Например, на частоте  $f^*$  (рис. 5.1)  $\Theta_B = 0$  при  $n_i < n_d$  и  $\Theta_B = -2$  при  $n_i > n_d$ .

Передаточная функция  $T$  позволяет определить ширину полосы пропускания пространственных частот  $\delta f_z = \Delta\theta_i/\lambda$  и предельное разрешение ячейки  $d_{\min} = 1/\Delta f_z$ . По уровню 3 дБ из (5.2.9) в случае, когда  $n_i, n_d = \text{const}$ , имеем

$$\Delta\Theta_i = 1,8/Q; \quad \Delta\theta_i = 0,89 v / l f_0 = 0,89 \varphi_s; \quad d_{\min} = 1,12 \lambda l f_0 / v. \quad (5.2.11)$$

При увеличении частоты ультразвука  $f_0$  угловой диапазон ячейки  $\Delta\theta_i$  сужается, а разрешение падает. На рис. 5.1 заштрихованы области пропускания ячейки для каждого из трех представленных вариантов.

Полученные результаты имеют простой физический смысл. Функция  $T$  представляет собой записанную в соответствующих координатах диаграмму направленности однородного ультразвукового пучка [174]. В более общем случае неоднородного пучка

$$a(x, z, t) = a_0(x) \exp[j(K_0 z - \Omega_0 t)] \quad (5.2.12)$$

вместо (2.4.13) имеем

$$C_1 = \frac{q^*}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x) \exp(j\eta x) dx. \quad (5.2.13)$$

Из (5.2.13) вытекает, что

$$T(\theta_i) \propto \frac{q^*}{2} \int_{-\infty}^{\infty} a_0(x) \exp[jK_0(\theta_i - \theta_B)x] dx. \quad (5.2.14)$$

Следовательно, для определения передаточной функции достаточно найти фурье-образ от распределения амплитуды в поперечном сечении акустического пучка. Это свойство акустооптической ячейки позволяет синтезировать необходимую передаточную функцию при помощи преобразователей с определенной структурой.

Заметим, что функция  $T$  не дает полного решения задачи о прохождении оптического сигнала через ячейку, поскольку она не учитывает конечную апертуру ячейки по оси  $z$ . Передаточная функция описывает лишь те изменения в спектре сигнала, которые обусловлены селективными свойствами акустооптического взаимодействия. Чтобы учесть конечную апертуру ячейки, можно воспользоваться таким приемом: считать, что звуковое поле по оси  $z$  неограничено, но в выходной плоскости  $x = l$  расположен экран с отверстием, соответствующим апертуре ячейки. Спектр сигнала на выходе такой системы является сверткой функции  $U_d(\theta_d)$  с фурье-образом коэффициента пропускания экрана [127].

Из (5.2.11) следует, что при  $n_i, n_d = \text{const}$  угловой диапазон ячейки не зависит от типа дифракции и геометрии взаимодействия, а определяется только углом расходимости ультразвукового пучка  $\varphi_s$ . Если же для используемого в ячейке среза кристалла показатели преломления  $n_i$  и  $n_d$  зависят от углов  $\theta_i$  и  $\theta_d$ , то передаточная функция представляет собой деформированную диаграмму направленности преобразователя. Но так диапазон  $\Delta\theta_i$  мал, то в большинстве случаев можно пренебрегать зависимостью  $n_i(\theta_i)$ ,  $n_d(\theta_d)$  и по-прежнему пользоваться формулами (5.2.11). Исключением являются лишь области, где  $df_0/d\theta_B \rightarrow 0$  (рис. 3.6).

Обозначим частоту, на которой  $df_0/d\theta_B = 0$  через  $f_c$ , а соответствующий ей угол Брэгга — через  $\theta_c$ . Дополнительным условием, отражающим особенности рассматриваемой геометрии взаимодействия, являются равенство нулю производной  $dn/d\theta_i$  в точке  $(\theta_c, f_c)$ . Это дает соотношение

$$\frac{dn}{d\theta_i}(\theta_c) = -\frac{\lambda K_c}{2\pi}, \quad (5.2.15)$$

где  $K_c = 2\pi f_c/v$ . Разлагая функцию  $\eta(\theta_i)$  вблизи угла  $\theta_c$  в ряд и учитывая (5.1.10), (5.2.15), имеем

$$\eta(\theta_i) = \frac{(K_0^2 - K_c^2) \lambda}{4\pi n} + (K_0 - K_c) \theta_i + \frac{\pi}{2} (\theta_i - \theta_c)^2 \frac{d^2 n_i}{d\theta_i^2}(\theta_c). \quad (5.2.16)$$

Вводя безразмерные величины

$$Q_c = \frac{\lambda f_c^2}{nv^2}; \quad F = \frac{f_0 - f_c}{f_c}; \quad \Theta_c = \frac{2nv\theta_c}{\lambda f_c}; \quad (5.2.17)$$

$$\Theta = \frac{\theta_i}{\theta_c}; \quad N_i'' = \frac{1}{n} \frac{d^2 n_i}{d\theta_i^2}(\theta_c),$$

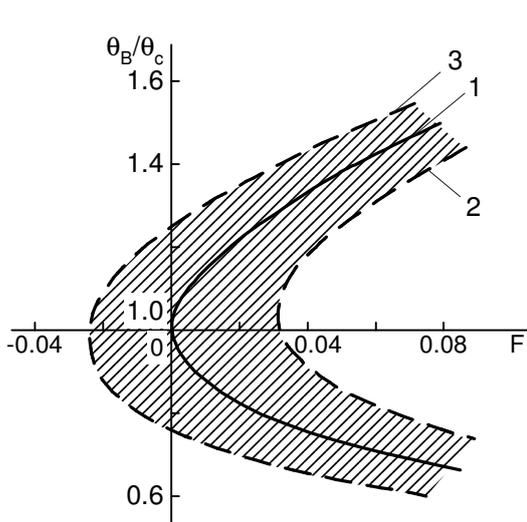


Рис. 5.2. Частотная зависимость угла Брэгга в области  $df_0/d\theta_B = 0$

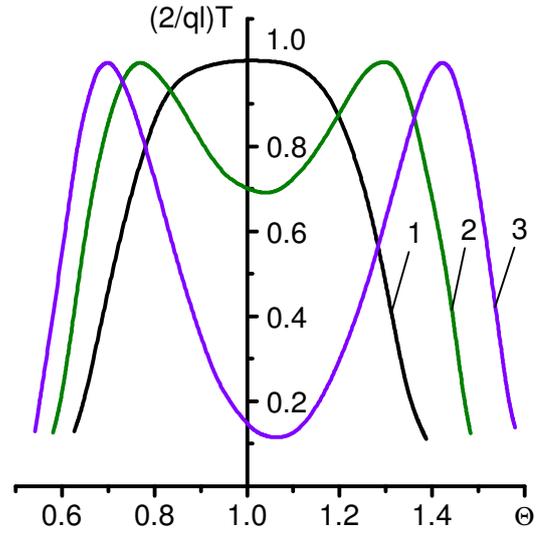


Рис. 5.3. Передаточная функция ячейки в области  $df_0/d\theta_B = 0$ :  
1 —  $F = 0$ ; 2 —  $F = 0,03$ ;  
3 —  $F = 0,06$

из (5.2.7) получаем выражение для передаточной функции в виде

$$T(\Theta) = \frac{ql}{2} \operatorname{sinc} \left\{ \frac{Q_c}{2} \left[ F(2+F) + F\Theta_c\Theta + N_i'' \frac{\Theta_c^2}{4} (\Theta - 1)^2 \right] \right\}. \quad (5.2.18)$$

Условие фазового синхронизма  $\eta = 0$  определяет частотную зависимость угла Брэгга:

$$\frac{\theta_B}{\theta_c} = \left( 1 - \frac{2F}{N_i''\Theta_c} \right) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - N_i'' \frac{F(2+F) + N_i''\Theta_c^2/4}{(F - N_i''\Theta_c/2)^2}} \right]. \quad (5.2.19)$$

График зависимости  $\theta_B(F)/\theta_c$  представлен на рис. 5.2 кривой 1. При  $F > 0$  эта кривая имеет две ветви, которые соответствуют знакам „ $\pm$ “ в (5.2.19). Область между кривыми 2 и 3 является областью пропускания ячейки. Расчет проведен для ниобата лития в случае, когда плоскость взаимодействия образует угол  $10^\circ$  с оптической осью. Для этого среза кристалла  $f_c = 190$  МГц,  $\theta_c = 10,4^\circ$ ,  $\Theta_c = 27$ ,  $N_i'' = -0,074$  (при  $\lambda = 0,63$  мкм). Границы области пропускания построены для  $Q_c = 1$ . На рис. 5.3 изображено семейство передаточных функций, рассчитанных по формуле (5.2.18). Наименьшие искажения в спектр оптического сигнала ячейка вносит при  $F = 0$ , когда передаточная функция имеет уплощенную вершину, а угловой диапазон определяется выражением  $\Delta\Theta_i^c = 3,8/\sqrt{Q_c|N_i''|}$ . С увеличением  $F$  в центре функции  $T$  образуется провал, и при  $F > F_\kappa$ , где  $F_\kappa \approx 0,89/Q_c(\Theta_c + 2)$ , полоса пропускания распадается на две области, ширина которых быстро уменьшается с ростом  $F$ , приближаясь к значениям, даваемым (5.2.11). Наиболее широкий угловой диапазон получается при  $F = F_\kappa$  (кривая 2).

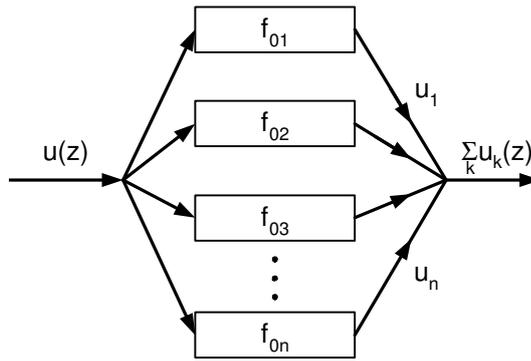


Рис. 5.4. Представление ячейки в виде набора фильтров пространственных частот

Слабая зависимость эффективности дифракции от угла падения света является главной особенностью рассмотренной геометрии взаимодействия<sup>3</sup>. При работе вблизи минимума кривой  $f_0(\theta_B)$  достигаются наибольшие полосы пропускания пространственных частот. Как следует из (5.2.11), выигрыш по ширине углового диапазона, который дает срез с рабочей частотой  $f_c$  по сравнению с обычной геометрией, равен  $\Delta\Theta_i^c/\Delta\Theta_i = 2\sqrt{Q/|N_i''|}$ .

Селективные свойства акустооптической ячейки позволяют использовать ее в системах оптической обработки информации в качестве фильтра пространственных частот. Такие фильтры обладают рядом преимуществ по сравнению с другими фильтрами, применяемыми в настоящее время. Они не критичны к месту расположения в системе, а главное, — могут быстро электрически перестраиваться (путем изменения параметров акустической волны), что дает возможность вести обработку поступающей информации в реальном масштабе времени.

Представление о ячейке как о фильтре пространственных частот при малой эффективности дифракции может быть распространено также и на случай немонахроматической упругой волны. При этом ячейку можно рассматривать как совокупность линейных фильтров, количество которых равно числу спектральных компонент акустического пучка (рис. 5.4). Передаточные функции фильтров имеют вид (5.2.7) (или, в более общем случае, (5.2.14)), но отличаются частотами  $f_0$ . Поэтому, хотя на вход фильтров одновременно поступает один и тот же оптический сигнал  $u(z)$ , их выходные сигналы  $u_k(z)$  оказываются разными. Выходной сигнал всей системы является суперпозицией сигналов  $u_k(z)$ .

**Большая эффективность дифракции.** При большой эффективности взаимодействия ячейка может рассматриваться как линейный фильтр пространственных частот лишь в случае гармонической упругой волны. В режиме дифракции Брэгга формула (2.2.17) приводит к следующему выражению для передаточной функции:

$$T_B(\Theta_i) = \frac{\pi P}{2} \operatorname{sinc} \left[ (1/2) \sqrt{P^2 + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2} \right], \quad (5.2.20)$$

<sup>3</sup>Эта геометрия используется в перестраиваемых фильтрах с большой угловой апертурой (§ 9.6).

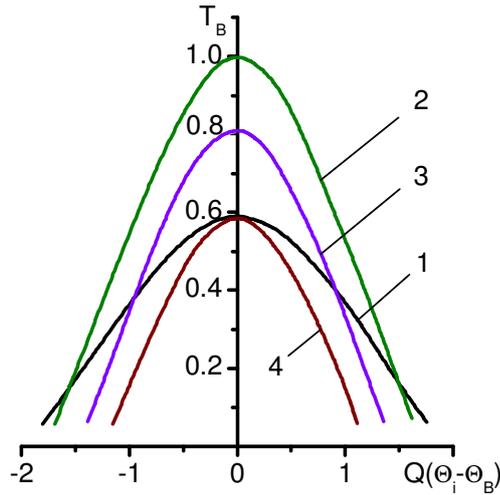


Рис. 5.5. Передаточные функции ячейки в режиме брэгговской дифракции:  
 1 —  $P = 0,4$ ; 2 —  $P = 1$ ; 3 —  $P = 1,4$ ; 4 —  $P = 1,6$

где

$$P = ql/\pi \quad (5.2.21)$$

— безразмерный параметр, определяемый амплитудой акустической волны. На рис. 5.5 приведены передаточные функции, рассчитанные по формуле (5.2.20) для случая  $n_i, n_d = \text{const}$ . С ростом акустической мощности меняется пропускание ячейки, и одновременно происходит сужение углового диапазона  $\Delta\Theta_i$  [130]. Таким образом, при большой эффективности дифракции селективные свойства брэгговского взаимодействия проявляются сильнее. Отметим однако, что в диапазоне  $0 < P < 1$ , наиболее интересном в прикладном плане,  $\delta\Theta_i$  изменяется незначительно — всего лишь на 10% (рис. 2.5). Абсолютный максимум функции  $T_B$ , равный единице, достигается при  $P = 1$  и  $\Theta_i = \Theta_B$ . Для всех других составляющих спектра оптического сигнала максимальные значения  $T_B < 1$  и достигаются при  $P < 1$  (рис. 2.4).

В области  $df_0/d\theta_B = 0$  зависимость  $T_B(P)$  носит тот же характер: с ростом  $P$  угловой диапазон ячейки сужается, а разрешение падает.

**Фильтрация оптического сигнала в нулевом порядке дифракции.** В рассмотренных выше примерах предполагалось, что выходным оптическим сигналом является дифрагированное излучение. Однако при большой эффективности взаимодействия для фильтрации изображений может использоваться также и нулевой порядок дифракции. Отфильтрованное изображение в этом случае формируется в пучке света, прямо проходящем через ячейку. Используя (2.2.16), получаем следующее выражение, связывающее угловые спектры падающего света  $U_i(\theta_i)$  и нулевого порядка  $U_0(\theta_i)$  в плоскости  $x = l/2$ :

$$U_0(\theta_i) = U_i(\theta_i) \exp(-j\eta l/2) \left[ \cos \frac{l\sqrt{q^2 + \eta^2}}{2} + j \frac{\eta}{\sqrt{q^2 + \eta^2}} \sin \frac{l\sqrt{q^2 + \eta^2}}{2} \right] \equiv U_i(\theta_i) T_0(\theta_i), \quad (5.2.22)$$

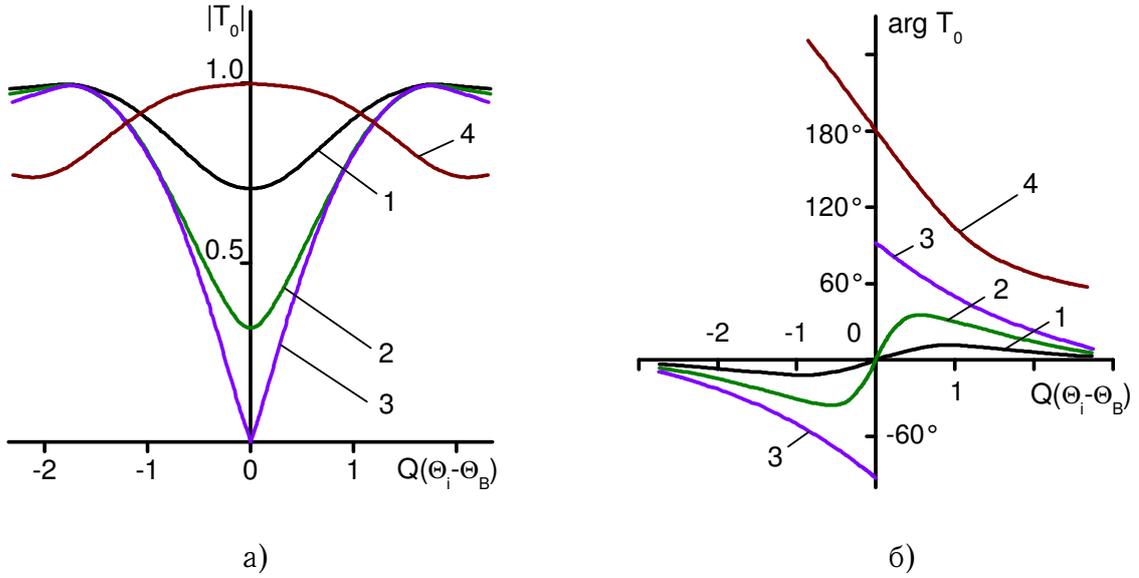


Рис. 5.6. Передаточные функции ячейки в нулевом порядке дифракции:  
 1 —  $P = 0,5$ ; 2 —  $P = 0,8$ ; 3 —  $P = 1,0$ ; 4 —  $P = 2,0$

где  $\eta$  определяется (5.1.10). Из (5.2.22) вытекает, что фильтрация в нулевом порядке имеет две особенности. Во-первых, спектр прошедшего света не испытывает смещения по шкале пространственных и временных частот. А, во-вторых, передаточная функция  $T_0$  является комплексной; ее модуль и аргумент определяются соотношениями

$$|T_0(\Theta_i)| = \sqrt{\frac{P^2 \cos^2 \left[ (\pi/2) \sqrt{P^2 + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2} \right] + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2}{P^2 + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2}}; \quad (5.2.23)$$

$$\arg T_0(\Theta_i) = \arctg \left[ \frac{Q(\Theta_i - \Theta_B)}{\sqrt{P^2 + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{P^2 + Q^2(\Theta_i - \Theta_B)^2} \right) \right] - \frac{\pi}{2} Q(\Theta_i - \Theta_B). \quad (5.2.24)$$

Графики зависимости  $|T_0(\Theta_i)|$  и  $\arg T_0(\Theta_i)$  показаны на рис. 5.6. Видно, что наиболее сильно  $T_0$  меняется вблизи угла Брэгга. Особенности функции  $T_0$  определяют ряд интересных свойств ячейки как фильтра пространственных частот. В частности, из рис. 5.6 следует, что при  $P = 2$  существует достаточно широкий угловой диапазон  $\Delta\Theta_i$ , в пределах которого  $|T_0| = \text{const}$ , а  $\arg T_0$  зависит от  $\Theta_i$  линейно. В этой области при прохождении светового пучка через ячейку должен наблюдаться эффект смещения изображения по оси  $z$ .

### 5.3 Дифракция светового пучка конечной ширины на монохроматической акустической волне

Апертурные эффекты, обусловленные конечными размерами области взаимодействия по оси  $z$ , играют большую роль в акустооптических устройствах, существенно влияя на их характеристики. Рассматривая взаимодействие ограниченных волновых пучков, можно выделить два случая: 1) ширина светового пучка  $d$  меньше размера звукового поля  $h$ , и тогда взаимодействие происходит так же, как и при неограниченном по  $z$  акустическом поле; 2)  $d > h$  и без ущерба для точности расчетов можно считать, что падающая световая волна имеет бесконечную апертуру.

Рассмотрим сначала первый случай [9, 129, 131]. Предположим, что на ячейку, в которой распространяется монохроматическая упругая волна (5.2.4), падает однородный световой пучок:

$$u_i(z) = u_0 \text{rect}(z/d), \quad (5.3.1)$$

где функция  $\text{rect}(x)$  по определению равна

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Если пучок падает под углом  $\theta_0$ , то его угловой спектр имеет вид

$$U_i(\theta_i) = u_0 d \text{sinc} [(nd/\lambda)(\theta_i - \theta_0)]. \quad (5.3.2)$$

Подставив (5.3.2) в (5.2.6), получим следующее выражение для углового распределения интенсивности дифрагированного света при малой эффективности взаимодействия:

$$I_d(\theta_d) \equiv |U_d|^2 = \left(\frac{ql}{2}\right)^2 u_0^2 d^2 \text{sinc}^2 \left[ \frac{nd}{\lambda} \left( \theta_d - \frac{\lambda}{n\Lambda_0} - \theta_0 \right) \right] \times \\ \times \text{sinc}^2 \left[ \frac{l}{\Lambda_0} \left( \theta_d - \theta_B - \frac{\lambda}{n\Lambda_0} \right) \right] \equiv \left(\frac{ql}{2}\right)^2 u_0^2 d^2 S_0^2 T_0^{L^2}. \quad (5.3.3)$$

Вводя безразмерные величины

$$\Theta_0 = \frac{2n\Lambda_0}{\lambda} \theta_0; \quad D = \frac{d}{\Lambda_0}, \quad (5.3.4)$$

функции  $S_0$  и  $T_0^L$  можно привести к виду

$$S_0 = \text{sinc}[(D/2)(\Theta_d - \Theta_0 - 2)]; \quad (5.3.5)$$

$$T_0^L = \text{sinc}[(Q/2)(\Theta_d - \Theta_B - 2)]. \quad (5.3.6)$$

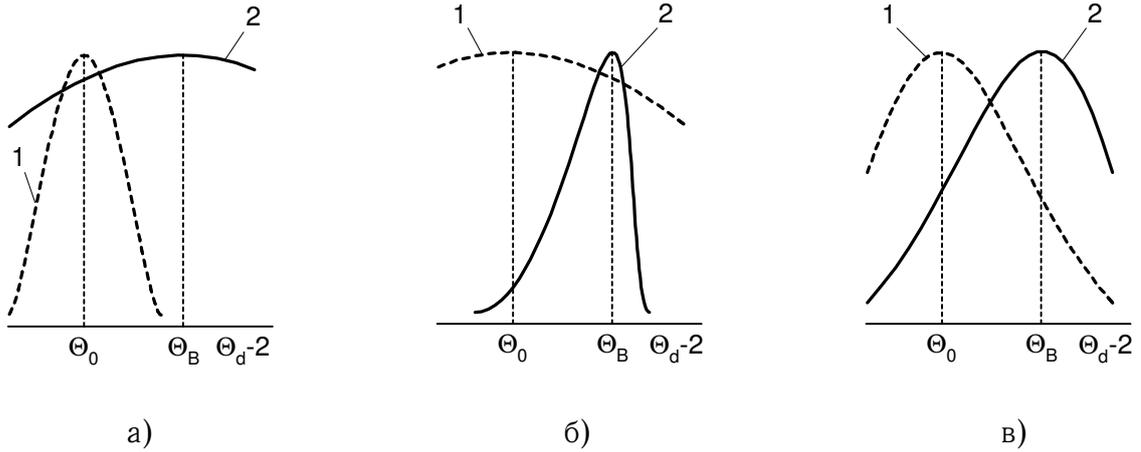


Рис. 5.7. Взаимное расположение функций  $S_0$  (1) и  $T_0^L$  (2) при разных значениях параметра Гордона  
 1 —  $G \ll 1$ ; 2 —  $G \gg 1$ ; 3 —  $G \sim 1$

По физическому смыслу эти функции представляют собой угловые спектры светового и акустического пучков. Таким образом, структура поля дифрагированного света определяется степенью перекрытия функций  $S_0$  и  $T_0^L$ , т. е. зависит от соотношения между углами расходимости светового  $\varphi_L = \lambda/nd$  и ультразвукового  $\varphi_S = \Lambda_0/l$  пучков. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Гордон [125]. Следуя ему, введем параметр  $G$ , равный

$$G = \varphi_L/\varphi_S = \lambda l/nd\Lambda_0 = Q/D. \quad (5.3.7)$$

Можно выделить три случая: 1)  $G \ll 1$ , 2)  $G \gg 1$  и 3)  $G \sim 1$  [93].

**1)  $G \ll 1$  ( $\varphi_L \ll \varphi_S$ ).** Взаимное расположение функций  $S_0$  и  $T_0^L$  для этого случая показано на рис. 5.7, а. Так как ширина функции  $T_0^L$  значительно превосходит ширину  $S_0$ , то угловое распределение интенсивности дифрагированного света определяется функцией  $S_0$ :  $I_d(\Theta_d) = (ql/2)^2 u_0^2 d^2 S_0^2(\Theta_d)$ . Следовательно, дифрагированный пучок сохраняет структуру падающего света. Этот режим дифракции используется, например, в дефлекторах.

**2)  $G \gg 1$  ( $\varphi_L \gg \varphi_S$ ).** В этом случае определяющую роль играет функция  $T_0^L$  (рис. 5.7, б):  $I_d(\Theta_d) = (ql/2)^2 u_0^2 d^2 T_0^{L2}(\Theta_d)$ . При этом в дифрагированный свет переносится структура ультразвукового пучка. Такой режим дифракции используется для визуализации акустических полей.

**3)  $G \sim 1$  ( $\varphi_L \sim \varphi_S$ ).** Функции  $S_0$  и  $T_0^L$  имеют ширину одного порядка (рис. 5.7, в). Такой режим дифракции нашел применение в модуляторах.

Все эти особенности дифракции ограниченного светового пучка следуют из рис. 5.8, на котором показана геометрия взаимодействия света с ультразвуком [66]. Дифрагированные волны рождаются во всех точках области перекрытия светового 1 и акустического 2 пучков. Интерферируя между собой, эти волны формируют пучок 3, распространяющийся под углом  $\theta = \lambda/n\Lambda_0$ . Из рисунка видно, что апертура дифрагированного пучка равна

$$d_d = \left( \frac{d}{\cos \theta_0} + 2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta - \theta_0) \approx d + \frac{\lambda l}{n\Lambda_0}. \quad (5.3.8)$$

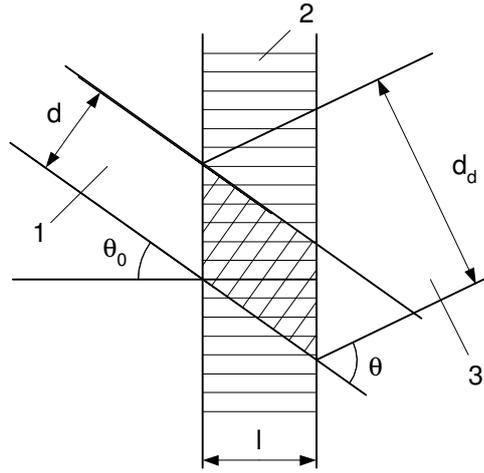


Рис. 5.8. Геометрические соотношения при взаимодействии светового и акустического пучков

Соотношение (5.3.8) можно записать в виде

$$\varphi_d^{-1} = \varphi_L^{-1} + \varphi_S^{-1}, \quad (5.3.9)$$

где  $\varphi_d = \lambda/nd_d$ . Из (5.3.9) следует уже известный результат: по порядку величины расходимость дифрагированного пучка всегда равна наименьшей из расходимостей взаимодействующих пучков.

Поскольку структура дифрагированного пучка в общем случае отличается от структуры падающего света [131], то для того, чтобы охарактеризовать эффективность взаимодействия в целом, введем интегральную эффективность дифракции  $\zeta$ , определив ее как отношение световой мощности в дифракционном порядке к мощности падающего излучения. Интегрируя (5.3.3) по всему угловому диапазону и относя к мощности падающего света

$$I_i = \int_{-\infty}^{\infty} U_i^2(\theta_i) d\theta_i = u_0^2 d\lambda/n, \quad (5.3.10)$$

получаем [129]

$$\zeta = \left(\frac{\pi P}{2}\right)^2 \frac{D}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2 T_0^2 d\Theta_d \equiv \left(\frac{\pi P}{2}\right)^2 B^L(Q, D, \Theta_0, \Theta_B). \quad (5.3.11)$$

При дифракции плоской световой волны наибольшая эффективность взаимодействия достигается, когда  $\theta_0 = \theta_B$ . В случае ограниченного светового пучка нельзя, очевидно, обеспечить выполнение условия Брэгга одновременно для всех составляющих (5.3.2). Поэтому выберем  $\theta_0$  так, чтобы условие фазового синхронизма выполнялось для осевой компоненты пучка. Тогда функция  $S_0$  запишется в виде  $S_0 = \text{sinc}[(D/2)(\Theta_d - \Theta_B - 2)]$ . Для этого случая, сле-

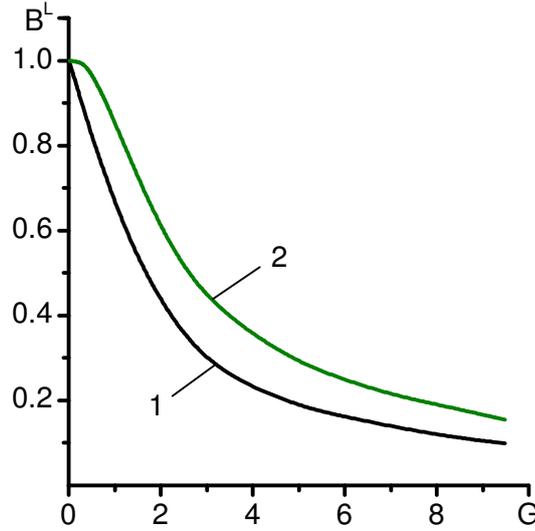


Рис. 5.9. Зависимость функции  $B^L$  от параметра Гордона для однородного (1) и гауссового (2) светового пучка [129]

лав в (5.3.11) замену переменной  $\Theta_d = 2GX/Q + \Theta_B + 2$ , получим

$$B^L = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 X \text{sinc}^2 GX dX = B^L(G). \quad (5.3.12)$$

Сравнивая (5.3.11) с (2.4.14), видим, что учет конечной ширины светового пучка приводит к появлению в формуле для эффективности дифракции дополнительного множителя  $B^L$ , зависящего только от соотношения расходимостей  $\varphi_L$  и  $\varphi_S$ . Из рис. 5.9, на котором кривой 1 показана зависимость  $B^L(G)$ , следует, что  $B^L \leq 1$ . Максимальное значение  $B^L = 1$  достигается при  $G = 0$ , что соответствует случаю дифракции плоской световой волны с неограниченной апертурой. С ростом  $G$  функция  $B^L$  убывает. Следовательно, при увеличении параметра Гордона  $G$  происходит ухудшение взаимодействия света с ультразвуком. Причина этого явления заключается в том, что из всех составляющих (5.3.2) условие фазового синхронизма выполняется только для одной — осевой, которая и дифрагирует с наибольшей эффективностью. Остальные же компоненты из-за рассинхронизма находятся в худших условиях и дифрагируют с меньшей эффективностью. Поэтому эффективность дифракции для пучка в целом (интегральная) оказывается меньше, чем в случае плоской волны, падающей под углом Брэгга. При  $G \gg 1$  в дифракции участвует лишь небольшая часть светового пучка, которая содержит составляющие, лежащие в пределах угла  $\varphi_S$ . В этом случае доля рассеиваемой световой мощности не превышает  $G^{-1}$ , что соответствует асимптотической зависимости  $B^L(G) = G^{-1}$ , получающейся из (5.3.12) при  $G \gg 1$ .

Отмеченные особенности взаимодействия ограниченных пучков сохраняются и при большой акустической мощности [9, 129, 131]. В режиме дифракции Брэгга вместо (5.3.6) имеем  $T_0^L = \text{sinc} \frac{1}{2} \sqrt{P^2 + Q^2(\Theta_d - \Theta_B - 2)^2}$ . При  $\Theta_0 = \Theta_B$  выражение для  $\zeta$  можно записать в виде [129]

$$\zeta = \sin^2(\pi P/2) B_B^L(G, P), \quad (5.3.13)$$

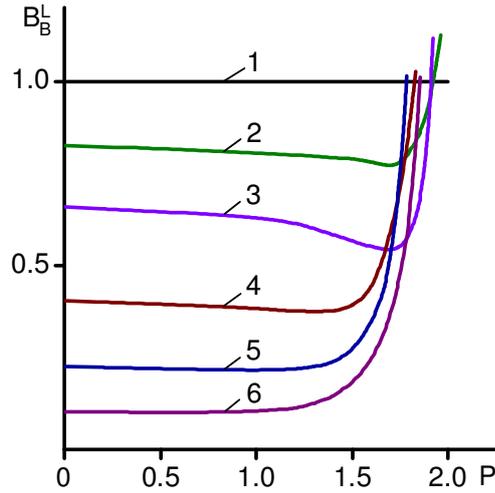


Рис. 5.10. Зависимость функции  $B_B^L$  от нормированной амплитуды акустической волны:

$$\begin{aligned}
 1 - G = 0; & \quad 2 - G = 0,5; & \quad 3 - G = 1; \\
 4 - G = 2; & \quad 5 - G = 4; & \quad 6 - G = 8
 \end{aligned}$$

где

$$B_B^L(G, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 X \text{sinc} \sqrt{(P/2)^2 + G^2 X^2} dX / \text{sinc}^2(P/2). \quad (5.3.14)$$

В формуле (5.3.13) выделен множитель  $\text{sinc}^2(\pi P/2)$ , описывающий эффективность дифракции плоской световой волны. Функция  $B_B^L$  имеет тот же физический смысл, что и  $B^L$ : она характеризует степень ухудшения эффективности взаимодействия вследствие конечной ширины светового пучка. При  $P \rightarrow 0$   $B_B^L$  переходит в  $B^L$ .

Зависимость  $B_B^L(P)$  имеет немонотонный характер (рис. 5.10). В области  $0 < P < 1$  функция  $B_B^L \approx \text{const}$ , и здесь для оценки  $\zeta$  можно пользоваться графиками рис. 5.9. При  $P \rightarrow 2$   $B_B^L$  возрастает, уходя в бесконечность.

Из (5.3.13) следует, что в случае  $G > 0$  для любых  $P$   $\zeta < 1$ . Это означает, что при дифракции пучка конечной апертуры (или в более общем случае — расходящейся световой волны) даже в режиме брэгговского взаимодействия нельзя добиться полной перекачки падающего излучения в дифракционный порядок [9, 131]. Следовательно, в реальных акустооптических устройствах потери света принципиально неустранимы, и особенно значительны они в тех устройствах, которые работают при больших значениях  $G$ .

Существенное снижение световых потерь можно получить в области минимума кривой  $f_0(\theta_B)$ . Как было показано в § 5.2, срезы кристаллов с рабочей частотой  $f_c$  имеют большой угловой диапазон и допускают работу с сильно расходящимися световыми пучками. Так, для представленного на рис. 5.2 примера с кристаллом  $\text{LiNbO}_3$  функция  $B^L$  уменьшается до значения 0,5 при  $G = 170$ , тогда как в случае  $n_i, n_d = \text{const}$  — уже при  $G = 1,6$ .

Для световых пучков, имеющих иную, чем (5.3.1), структуру, различия но-

сят лишь количественный характер. Например, для гауссова пучка

$$u(z) = u_0 \exp(-4z^2/d^2), \quad (5.3.15)$$

где  $d$  — диаметр пучка в перетяжке, функция  $B^L$  имеет вид

$$B^L = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-8X^2) \operatorname{sinc}^2 GX dX. \quad (5.3.16)$$

Здесь  $G = 4Q/\pi D$ . Зависимость  $B^L(G)$  показана на [рис. 5.9](#) кривой 2.

## 5.4 Взаимодействие плоской световой волны с акустическим цугом

Ограничение области взаимодействия по оси  $z$  возможно также при возбуждении в ячейке короткого акустического цуга длиной  $h < d$  [[129](#)]. Для цуга с прямоугольной огибающей и частотой несущей  $f_0$

$$a(z) = a_0 \operatorname{rect}[(z - vt)/h] \exp[j(K_0 z - \Omega_0 t)] \quad (5.4.1)$$

спектр акустического поля имеет вид

$$A(K) = a_0 h \exp(-j\Omega t) \operatorname{sinc}[(h/2\pi)(K - K_0)]. \quad (5.4.2)$$

Если на ячейку под углом  $\theta_0 = \theta_B(f_0)$  падает плоская световая волна с амплитудой  $u_0$ , то

$$U_i(\theta_i) = (u_0 \lambda / n) \delta(\theta_i - \theta_B). \quad (5.4.3)$$

Подставляя (5.4.2) и (5.4.3) в (5.1.7), получаем [[129](#)]

$$I_d(\Theta_d) = \left(\frac{\pi P}{2}\right)^2 u_0^2 h^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{H}{2} (\Theta_d - \Theta_B - 2) \right] \times \\ \times \operatorname{sinc}^2 \left\{ \frac{Q}{8} [\Theta_d^2 - (\Theta_B + 2)^2] \right\} \equiv \left(\frac{\pi P}{2}\right)^2 u_0^2 h^2 S_0^2 T_0^{S^2}, \quad (5.4.4)$$

где

$$H = h/\Lambda_0. \quad (5.4.5)$$

Как и в рассмотренном в [§ 5.3](#) случае, выражение для интегральной эффективности дифракции можно записать в виде

$$\zeta = (\pi P/2)^2 B^S(Q, H, \Theta_B). \quad (5.4.6)$$

Но функция  $B^S$ , в отличие от  $B^L$ , определяется не только параметром Гордона  $G = Q/H$ , но зависит также от длины цуга  $H$  и угла Брэгга  $\Theta_B$ :

$$B^S = \frac{H}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_0^2 T_0^{S^2} d\Theta_d = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 X \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{GX}{2} \left( \frac{X}{H} + \Theta_B + 2 \right) \right] dX. \quad (5.4.7)$$

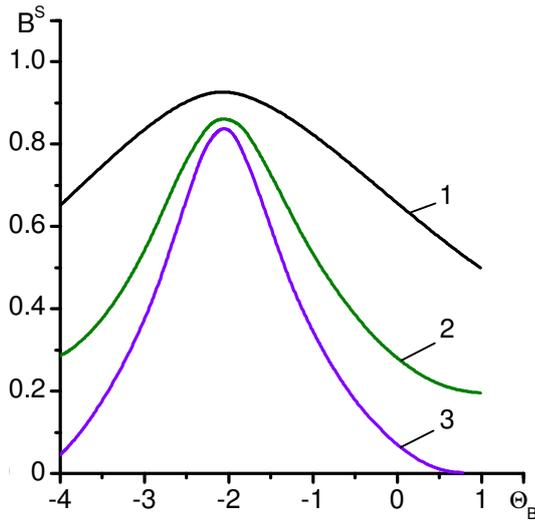


Рис. 5.11. Зависимость функции  $B^S$  от угла Брэгга при  $H = 3$  [129]:  
 1 —  $G = 1$ ;    2 —  $G = 3$ ;    3 —  $G = 5$

Зависимость  $B^S(G)$  имеет тот же характер, что и  $B^L(G)$ . Максимальное значение  $B^S = 1$  достигается при  $G = 0$ . С увеличением  $G$  эффективность взаимодействия падает, однако в разной степени для различных углов Брэгга. Из рис. 5.11 видно, что наибольшая эффективность дифракции достигается при  $\Theta_B = -2$ . При  $\Theta_B = 0$  функция  $B^S(G)$  практически совпадает с  $B^L(G)$ . В этом проявляется важная особенность акустооптического взаимодействия: структура поля дифрагированного света в первую очередь определяется размерами и формой области взаимодействия. Сравнивая оба рассмотренных случая дифракции света, нетрудно заметить, что именно при  $\Theta_B = 0$  области взаимодействия имеют наиболее похожую геометрию.

Полученные результаты можно пояснить с помощью векторных диаграмм. В первом случае (рассмотренном в § 5.3) взаимодействующие пучки содержат компоненты с векторами  $\vec{k}_i$  и  $\vec{K}_0$ , имеющими разную ориентацию в пределах углов  $\varphi_L$  и  $\varphi_S$  (рис. 5.12, а). В дифракции участвуют те вектора, которые удовлетворяют условию фазового синхронизма (3.3.1). Из диаграммы видно, что эффективность взаимодействия в этом случае определяется только соотношением расходимостей пучков и не зависит от угла Брэгга. Иначе обстоит дело во втором случае (рис. 5.12, б). Спектр падающего света содержит только одну составляющую, но зато спектр акустического поля включает компоненты с векторами, имеющими разную ориентацию в пределах угла и разную длину в интервале  $\Delta K = 2\pi/h$ . Условие (3.3.1) выполняется для всех  $\vec{K}$ , концы которых лежат на дуге окружности радиуса  $k_d$ , попадающей внутрь заштрихованной области. Длина дуги максимальна при  $\Theta_B = -2$ . Этим и объясняется характер приведенных на рис. 5.11 зависимостей  $B^S(\Theta_B)$ .

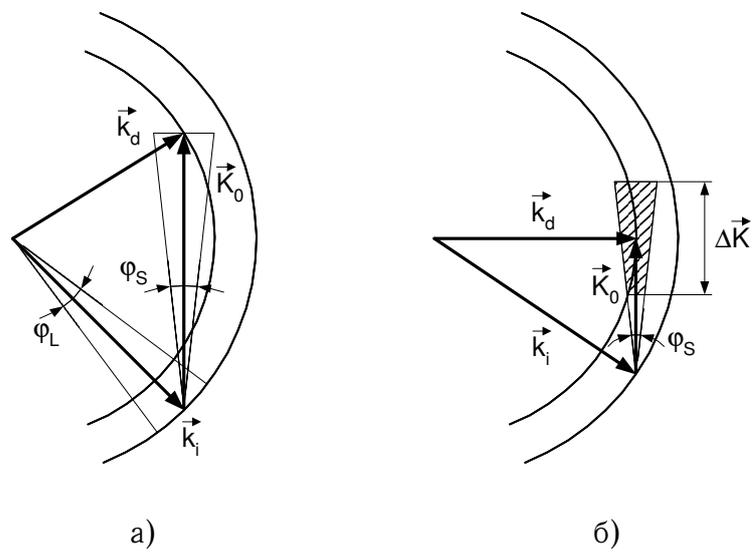


Рис. 5.12. Векторные диаграммы для случаев дифракции светового пучка на монохроматической акустической волне (а) и дифракции плоской световой волны на акустическом цуге (б)