

## Глава 4

# Анализ акустооптического взаимодействия

Известно, какой сложной и трудоемкой задачей является расчет акустооптической ячейки, особенно в тех случаях, когда намеченные направления не относятся к „простым“: упругая волна и световой пучок должны распространяться под некоторыми углами к главным осям. Подобная ситуация встречается постоянно и характерна, например, для устройств на основе анизотропной дифракции света, коллинеарного взаимодействия, когда выбор направлений диктуется прежде всего соображениями реализуемости выбранного варианта взаимодействия, которым „простые“ направления могут не отвечать.

В рамках электрооптики была поставлена [75–79] и в конечном итоге решена, практически в общем виде [25, 78–83], задача расчета направлений, в которых электрооптический эффект достигает экстремальной величины. Аналогичные задачи в рамках акустооптики в общем виде до сих пор не ставились. Известны лишь отдельные попытки расчета направлений, в которых акустооптический эффект достигает максимума [84–86]. Использованный в этих работах метод прост: задача решалась путем перебора направлений на ЭВМ через заданные интервалы. Подобным образом была изучена анизотропия акустооптического взаимодействия в кристаллах ниобата лития и парателлурита — материалах, достаточно высокосимметричных, что, конечно, упрощало анализ.

Однако, даже в этих случаях заметно, насколько малоэффективен метод перебора направлений. При довольно значительных затратах машинного времени, накопленные к настоящему времени данные о результатах выполненных расчетов, рекомендации по выбору срезов, полезные с позиций практики выводы весьма немногочисленны. В литературе почти полностью отсутствуют методологические рекомендации по расчету первичных параметров акустооптического взаимодействия: эффективной упругооптической постоянной, соответствующих направлений упругой и электромагнитной волн. Аналитическая сложность задачи, неотработанность ее математического аппарата и в какой-то степени традиционная приверженность к матричным представлениям, недостатки которых в этом случае особенно существенны, и стали тормозом в развитии этого важного теоретического раздела акустооптики.

Ниже будет показано, что в своей общей формулировке задача анализа акустооптического взаимодействия требует учета большого числа связей между

векторными характеристиками упругой и электромагнитной волн. По этой причине задача оказывается практически недоступной для анализа даже на современных ЭВМ. Тем не менее последовательное применение такого важного свойства кристаллов, как симметрия, открывает весьма эффективные пути расчета.

## 4.1 Экстремумы упругооптического эффекта

Рассмотренная в § 1.4 феноменологическая теория упругооптического эффекта отвечает на вопрос: каким образом при заданном тензоре деформации  $\gamma$ , собственном триплете  $\vec{d}_{\pm 1,0}$  электромагнитной волны, коэффициенты преломления  $n_{\pm 1}$  связаны с амплитудой  $A_0$  поля деформаций. В такой формулировке задача расчета, хотя и трудоемка, но разрешима даже в рамках, приведенных в § 1.4 соотношений. Однако, практика применения акустооптических устройств ставит иную задачу: определить тензор  $\gamma$  и триплет  $\vec{d}_{\pm 1,0}$ , чтобы заданный упругооптический материал использовался наилучшим образом. В более сложной постановке требуется отыскать материал, наилучшим образом отвечающий поставленной задаче.

Что следует вкладывать в понятие „наилучшим“, конечно, зависит от конкретной задачи. Однако чаще всего необходимо определить так геометрические и связанные с ними феноменологические характеристики акустооптического взаимодействия, чтобы эффективность взаимодействия оказалась максимальной.

В самой простой формулировке постановочная часть задачи определения экстремумов упругооптического эффекта должна содержать требование максимума эффективной упругооптической постоянной или  $\Delta\kappa_{\alpha\beta}$  (см. § 1.4). Более последовательным было бы требование максимума параметра  $n_{\alpha}^3 \Delta\kappa_{\alpha\alpha}$  (1.4.14), определяющего изменение показателя преломления. Эффективность анизотропной дифракции зависит от величины  $\beta(n_{-1} - n_1)$ , поэтому в соответствии с (1.4.12) следует потребовать в этом случае максимума  $n_1^2 n_{-1}^2 \Delta\kappa_{1,-1} / (n_1 + n_{-1})$ . Однако входящие в эти выражения функции, зависящие от  $n_{\alpha}$ , изменяются с изменением направления обычно существенно медленнее, чем  $\Delta\kappa_{\alpha\beta}$  и поэтому слабо влияют на положения экстремума. Последнее позволяет искать экстремумы эффекта, ориентируясь лишь на коэффициенты  $\Delta\kappa_{\alpha\beta}$ .

Первоначально решим задачу определения экстремумов упругооптического эффекта в чистом виде, т. е. без учета особенностей физики акустооптического взаимодействия, в этом случае тензор деформаций будем рассматривать как полный тензор второго ранга  $\gamma = \gamma_{ij} \vec{\xi}_i \vec{\xi}_j$ , где  $\gamma_{ij}$  — координаты тензора в некоторой системе координат с базисом  $\vec{\xi}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Полная свертка этого тензора с самим собой  $\tilde{\gamma}\gamma = \sum \gamma_{ij} \gamma_{ij} = \gamma_0^2$  образует скаляр  $\gamma_0$ , с помощью которого этот тензор может быть нормирован:  $\gamma' = \gamma / \gamma_0$ . В дальнейших выкладках мы будем использовать нормированный тензор  $\tilde{\gamma}'\gamma' = 1$ .

В работе [81] было показано, что для параметрических эффектов оптики, полевые тензоры внешней силы, в которых допускают нормировку вида  $\tilde{\gamma}'\gamma' = 1$  (и других ограничений выбора этого тензора нет), задача определения экстремумов может быть поставлена и решена в самом общем виде. Следуя этой

работе, введем характеристический тензор упругооптического эффекта:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} \mathbf{p}; \quad \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{p}} \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}}. \quad (4.1.1)$$

Тензор  $\mathbf{r}$  представляет упругооптический эффект как функцию направления  $\vec{\vec{d}}$ . Эффективный упругооптический коэффициент  $p_s$  для электромагнитной волны, поляризованной вдоль вектора  $\vec{\vec{d}}$ , отвечающий за изменение показателя преломления  $n$  в среде, подвергнутой деформации  $\gamma'$ , в соответствии с (1.4.16) равен

$$p_s = \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} \mathbf{p} \gamma' = \tilde{\mathbf{r}} \gamma'. \quad (4.1.2)$$

Условие экстремальности (4.1.2) формулируется как условие равенства нулю вариаций:

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{\mathbf{r}} \gamma') &= (\delta \tilde{\mathbf{r}}) \gamma' + \tilde{\mathbf{r}} (\delta \gamma') = 0; \\ \delta(\gamma' \gamma') &= (\delta \gamma') \gamma' + \gamma' \delta \gamma' = 2(\delta \gamma') \gamma' = 0. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Комбинируя оба условия (4.1.3), можно заметить, что первая из формул (4.1.3) удовлетворена, если

$$\delta(\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{r}) = 0; \quad \gamma' = \gamma_0 \mathbf{r}. \quad (4.1.4)$$

Первое из равенств (4.1.4) определяет условие существования экстремума, второе определяет тензор деформации, при котором этот экстремум достигается. Из (4.1.1) следует, что

$$\tilde{\mathbf{r}} \mathbf{r} = \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} \tilde{\mathbf{p}} \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} = \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} \mathbf{R} \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}}, \quad (4.1.5)$$

где  $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}$ . Воспользовавшись координатной формой определения тензора  $\mathbf{p}$  (1.4.4), находим

$$R_{ijij'} = \sum_{k,l} p_{ijkl} p_{klil'j'}; \quad R_{\lambda\lambda'} = R_{ijij'}. \quad (4.1.6)$$

Вторая из этих формул определяет тензор  $\mathbf{R}$  через его матричное представление. Из (4.1.6) видно, что тензор  $\mathbf{R}$  определяется, как свертка двух тензоров упругооптических коэффициентов по индексам  $k, l$ . Внутренняя симметрия этого тензора  $[[V^2]^2]$  совпадает с внутренней симметрией тензора коэффициентов упругости  $\mathbf{c}$ .

Общее условие существования экстремума на основе соотношений (4.1.4), (4.1.5) может быть сформулировано следующим образом:

$$\delta(\vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} \mathbf{R} \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}}) = 0; \quad \vec{\vec{d}} \vec{\vec{d}} = 1. \quad (4.1.7)$$

Второе из этих уравнений определяет нормировку вектора  $\vec{\vec{d}}$ , который в (4.1.7) должен рассматриваться как подлежащая определению векторная переменная. Вектор  $\vec{\vec{d}}$  можно разложить по базису главной системы координат  $\vec{\xi}_{0i}$ , используя углы Эйлера:

$$\vec{\vec{d}} = \sin \theta \cos \varphi \vec{\xi}_{01} + \sin \theta \sin \varphi \vec{\xi}_{02} + \cos \theta \vec{\xi}_{03}, \quad (4.1.8)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\vec{\xi}_{03}$  и  $\vec{d}$ ,  $\varphi$  — угол между  $\vec{\xi}_{01}$  и проекцией  $\vec{d}$  на координатную плоскость, в которой лежат  $\vec{\xi}_{01}$ ,  $\vec{\xi}_{02}$ . В представлении (4.1.8) независимыми переменными являются углы  $\theta$ ,  $\varphi$ , а векторы  $\vec{d}$  (4.1.8) автоматически нормированы. Поэтому уравнения (4.1.7) после подстановки (4.1.8) приобретают вид:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{d} \vec{d} \mathbf{R} \vec{d} \vec{d}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (\vec{d} \vec{d} \mathbf{R} \vec{d} \vec{d}) = 0. \quad (4.1.9)$$

В подобной форме уравнения экстремумов эффективных упругооптических постоянных удобны в тех случаях, когда в группу симметрии кристалла входит поворотная ось высокого порядка (3, 4 или 6), ось  $\vec{\xi}_{03}$  должна быть совмещена с этой осью. Подробно методы решения уравнений (4.1.9), применительно к задачам электрооптики, рассмотрены в [25].

Другой метод решения уравнений (4.1.7) связан с поиском условного экстремума эффективных упругооптических коэффициентов методом неопределенных множителей Лагранжа. В этом случае ищется условный экстремум функционала  $\Phi = \vec{d} \vec{d} \mathbf{R} \vec{d} \vec{d} - 2\mu (\vec{d} \vec{d} - 1)$ . Уравнением, эквивалентным (4.1.9), является

$$(1/4) \vec{\nabla}_{\vec{d}} \Phi = \vec{d} \mathbf{R} \vec{d} \vec{d} - \mu \vec{d} = 0; \quad \vec{d} \vec{d} = 1. \quad (4.1.10)$$

При выводе уравнения (4.1.10) учитывалось, что внутренняя симметрия тензора  $\mathbf{R}$  допускает произвольную перестановку векторов  $\vec{d}$  в первом члене функционала  $\Phi$ .

Методы решения уравнений (4.1.9), (4.1.10) зависят от конкретного вида тензора  $\mathbf{R}$ , определяемого симметрией анализируемой среды. Однако для кристаллов, относящихся к ромбической, тетрагональной, гексагональной и кубической сингониям — во всех случаях, когда в группу симметрии тензора входит подгруппа  $mmm$ , можно найти общее решение уравнения (4.1.10). Оси главной системы координат при наличии подгруппы  $mmm$  ориентируются вдоль осей второго порядка, совпадающих с направлениями пересечения плоскостей симметрии. Среди компонент  $R_{ijkl} = \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \mathbf{R} \vec{\xi}_{0k} \vec{\xi}_{0l}$  при этом окажутся равными нулю все, в которых то или иное значение индекса встречается нечетное число раз [15]. Таким образом, тензор  $\mathbf{R}$  приобретает вид:

$$\mathbf{R} = \sum_{i,j} R_{ijij} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \vec{\xi}_{0j} + 2R_{ijij} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j}. \quad (4.1.11)$$

Во втором члене (4.1.11)  $i \neq j$ .

Подставим (4.1.11) в уравнение (4.1.10) и перейдем к координатному представлению. После некоторых преобразований получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} R_{1111} d_1^3 + (R_{1122} + 2R_{1212}) d_1 d_2^2 + (R_{1133} + 2R_{1313}) d_1 d_3^2 - \mu d_1^2 &= 0; \\ (R_{1122} + 2R_{1212}) d_2 d_1^2 + R_{2222} d_2^3 + (R_{2233} + 2R_{2323}) d_2 d_3^2 - \mu d_2^2 &= 0; \\ (R_{1133} + 2R_{1313}) d_3 d_1^2 + (R_{2233} + 2R_{2323}) d_3 d_2^2 + R_{3333} d_3^3 - \mu d_3^2 &= 0; \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

где  $d_i = \vec{\xi}_{0i} \vec{d}$  — направляющие косинусы вектора  $\vec{d}$  в системе координат  $\vec{\xi}_{0i}$ .

Все решения системы уравнений (4.1.12) распадаются на три группы. Первую группу образуют векторы  $\vec{d}$ , совпадающие по направлению с одним из векторов  $\vec{\xi}_{0i}$ . Решения, относящиеся к этой группе, имеют вид

$$d_i^2 = 1; \quad d_j = d_k = 0; \quad i \neq j \neq k. \quad (4.1.13)$$

Во вторую группу входят решения, отвечающие случаю, когда  $\vec{d}$  ортогонален одному из векторов  $\vec{\xi}_{0i}$ . Эти решения имеют вид:

$$\begin{aligned} d_i &= 0; \quad i \neq j \neq k \\ d_j^2 &= \frac{R_{kkkk} - (R_{kkjj} + 2R_{kjkj})}{R_{jjjj} + R_{kkkk} - 2(R_{jjkk} + 2R_{jkjk})}; \\ d_k^2 &= \frac{R_{jjjj} - (R_{kkjj} + 2R_{kjkj})}{R_{jjjj} + R_{kkkk} - 2(R_{jjkk} + 2R_{jkjk})}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Третья группа представлена решениями

$$d_i^2 = A_{4i} / \det(a_{ij}), \quad (4.1.15)$$

где  $a_{ij}$  — элементы матрицы системы уравнений (4.1.12),  $A_{4i}$  — алгебраическое дополнение к элементу  $a_{ij}$  этой матрицы.

Решения (4.1.13), (4.1.14), (4.1.15) исчерпывают решения системы уравнений (4.1.12) и определяют полный набор экстремальных направлений для случаев, когда в группе симметрии тензора  $\mathbf{R}$  присутствует подгруппа  $mmm$ . Следует подчеркнуть, что среди этих решений две группы (4.1.13) и (4.1.14) связаны с элементами симметрии: вектор  $\vec{d}$  параллелен или ортогонален одной из осей второго порядка  $\vec{\xi}_{0i}$ . Для третьей группы решений такая связь в общем не обнаруживается.

Связь части решений рассматриваемой задачи с элементами симметрии не случайна. Эту связь можно выделить более явно, если обратить внимание на аналогию уравнения (4.1.10) и уравнения Кристоффеля (1.3.5) для продольных волн ( $\vec{m} = \vec{a}_0$ ).

Как уже отмечалось, оси 2 порядка подгруппы  $2/m$  тензора  $\mathbf{R}$  являются продольными нормальными упругой среды. Этот же вывод может быть сделан и относительно решений уравнения (4.1.10) — все оси 2 порядка подгруппы  $2/m$  тензора  $\mathbf{R}$  являются экстремальными направлениями упругооптического эффекта. Среди найденных решений для подгруппы  $mmm$  такими являются решения (4.1.13).

Если  $\vec{d}$  — решение уравнения (4.1.10) или уравнений (4.1.12), то  $\gamma' = \gamma_0 \mathbf{p} \vec{d} \vec{d}$  (4.1.4) определяет требуемое для реализации экстремальной эффективности поле упругих деформаций. Получаемый таким образом тензор  $\gamma'$  является полным тензором третьего ранга. С другой стороны, поле деформаций упругой волны (1.3.11) не является полным тензором третьего ранга. Действительно, вектор  $\vec{m} \times \vec{a}_\alpha$  при свертке с тензором  $\gamma' = (1/2)(\vec{m} \vec{a}_\alpha + \vec{a}_\alpha \vec{m})$  обращает последний в нуль:  $\gamma' \vec{m} \times \vec{a}_\alpha = 0$ . Таким образом, деформации в поле плоской упругой волны сингулярны. Это означает, что невозможно в поле плоской акустической волны получить деформации, удовлетворяющие уравнениям (4.1.10), (4.1.12).

## 4.2 Общее определение экстремумов акустооптического взаимодействия

Условием существования экстремума акустооптического взаимодействия будем считать условие  $\delta p_{\text{э}} = 0$  — равенство нулю вариации эффективной акустооптической постоянной:

$$\delta p_{\text{э}} = \delta \left( \vec{d}_{\alpha} \vec{d}_{\beta} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_{\gamma} \right) = 0. \quad (4.2.1)$$

Входящие в это уравнение векторные функции не являются произвольными. На их выбор наложены ограничения, определяемые уравнениями связи:

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{1} - \vec{d}_0 \vec{d}_0 \right) \boldsymbol{\kappa} \vec{d}_{\alpha} &= n_{\alpha}^{-2} \vec{d}_{\alpha}; & \vec{a}_{\gamma} \vec{m} \mathbf{c} \vec{m} \vec{a}_{\gamma} &= \rho v_{\gamma}^2; \\ \vec{a}_{\gamma} \vec{a}_{\gamma'} &= \delta_{\gamma\gamma'}; & \vec{m} \vec{m} &= 1; \\ \vec{d}_{\alpha} \vec{d}_{\beta} &= \delta_{\alpha\beta} & \vec{m} \vec{d}_0 &= \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma' = \pm 1, 0$ . Первые два уравнения связи (4.2.2) — это уравнения электро- и эластодинамики соответственно. Далее в (4.2.2) включены условия ортогональности и нормировки соответствующих собственных триплетов. Последнее уравнение определяет устанавливаемую соответствующим типом дифракции взаимную ориентацию волновых нормалей. Например, при коллинеарном взаимодействии света и звука  $\vec{m} = \vec{d}_0$ , поэтому  $\cos \theta = 1$ . В случае анизотропной или изотропной дифракции в качестве угла  $\theta$  может фигурировать  $\pi/2 - \theta_B$ .

Входящие в (4.2.1) векторы  $\vec{d}_{\alpha}$  и  $\vec{d}_{\beta}$  должны относиться к разным волнам: падающей и дифрагировавшей соответственно. В связи с этим первое из уравнений связи (4.2.2) следует разделить на два уравнения с различными волновыми нормальями  $\vec{d}_0$ , отвечающими падающей и дифрагировавшей волнам. Однако в такой более строгой формулировке задача окажется еще более сложной. В то же время учет различия в направлениях падающего и дифрагированного света не ведет к принципиально важным изменениям  $p_{\text{э}}$  и потому не оправдан.

Поэтому в дальнейшем считаем векторы  $\vec{d}_{\alpha}$ ,  $\vec{d}_{\beta}$ , относящиеся к одному и тому же собственному триpletу, опирающемуся на волновую нормаль  $\vec{d}_0$ , в качестве которой выберем нормаль падающего луча. Выбор угла  $\theta$  также ограничим простыми условиями. Угол  $\theta = 0$  — для коллинеарного взаимодействия и  $\theta = \pi/2$  — для дифракционного рассеяния, при этом  $\alpha = \beta$  в (4.2.1) отвечает изотропной дифракции,  $\alpha \neq \beta$  — анизотропной.

Не все из принятых выше ограничений являются обязательными. Мы их приняли с целью упростить форму исходных связей, чтобы сделать более четким и ясным их последующий анализ. Можно заметить, что все параметры, от учета которых мы выше отказались, относительно слабо влияют на конечный результат. Располагая решениями сформулированной задачи, мы сохраняем возможность впоследствии внести необходимую уточняющую корректировку.

Уравнения (4.2.1), (4.2.2) образуют полную систему уравнений, позволяющих оптимизировать акустооптическое взаимодействие по величине его эффективной постоянной. С позиций практической акустооптики подобную оптимизацию следовало бы вести относительно другого параметра — постоянной  $M_2$



акустооптического качества, поскольку в этом случае обеспечивается экстремум по эффективности использования мощности упругой волны. Сохраняя за собой возможность вернуться к этому вопросу ниже, заметим, что выбор более простого параметра  $p_3$  позволяет вести расчет характеристик взаимодействия, опираясь на наиболее простые выражения.

Соотношения (4.2.1), (4.2.2) связывают в общей сложности пять векторных функций, причем уравнения (4.2.1) и второе из уравнений (4.2.2) являются уравнениями четвертого порядка. Если с помощью известных методов перейти от уравнений (4.2.1), (4.2.2) к соответствующим линейным соотношениям, общее число линейных уравнений связи превысит 50! Решение этих уравнений и последующая их интерпретация оказываются серьезной задачей, практически трудной даже для современных ЭВМ. Этим и объясняется отсутствие попыток решения задачи в общей постановке.

Тем не менее, если не искать все возможные решения и ограничиться только теми, которые связаны с симметрией среды, можно настолько упростить исходную систему уравнений, что ее решение окажется не только легко выполнимым на ЭВМ, но и доступным аналитическим средствам.

Внутренняя симметрия материальных тензоров  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{c}$  в индексах Яна  $[[V^2]^2]$  для  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{c}$  и  $[V^2]$  для  $\mathbf{x}$  такова, что все они имеют центр симметрии. Последнее означает, что эти тензоры будут иметь общую подгруппу  $2/m$ , если в группе симметрии соответствующего кристалла есть ось четного порядка или плоскость симметрии. Если векторы  $\vec{d}_\alpha$ ,  $\vec{d}_\beta$ ,  $\vec{m}$ ,  $\vec{a}_\gamma$ , входящие в (4.2.1), ориентированы вдоль оси 2 или плоскости симметрии  $m$  подгруппы  $2/m$  так, что с каждым из этих направлений связано четное число векторов, то плоскость симметрии войдет в группу симметрии  $p_3$ . Перебирая возможные варианты, можно показать, что эта же плоскость симметрии сохранится и во всех уравнениях связи (4.2.2). Общая плоскость симметрии по принципу Кюри-Неймана [15] определит и симметрию решений.

Если вектор  $\vec{\chi}_2$  ортогонален плоскости симметрии, а векторы  $\vec{\chi}_{mi}$  лежат в этой плоскости, то свертка тензора  $\mathbf{p}$  с этими векторами дает нуль при нечетном числе векторов  $\vec{\chi}_2$ , т. к. свертка инвариантна относительно смены знака  $\vec{\chi}_2$ .

$$\vec{\chi}_{m1}\vec{\chi}_{m2}\mathbf{p}\vec{\chi}_{m3}\vec{\chi}_2 = \vec{\chi}_{m1}\vec{\chi}_2\mathbf{p}\vec{\chi}_2\vec{\chi}_2 = 0. \quad (4.2.3)$$

Внутренняя симметрия тензора  $\mathbf{p}$  допускает произвольную перестановку векторов в (4.2.3). Если  $\vec{\xi}_i$  — базис некоторой системы координат, в которой ось  $\vec{\xi}_3$  нормальна плоскости симметрии, а  $p_{ijkl} = \vec{\xi}_i\vec{\xi}_j\mathbf{p}\vec{\xi}_k\vec{\xi}_l$ , то из (4.2.3) сразу же следует равенство нулю всех координат  $p_{ijkl}$  тензора  $\mathbf{p}$ , в которых индекс „3“ встречается нечетное число раз.

Вернемся к (4.2.1), заметив, что с помощью векторного дифференциального оператора  $\nabla$  произвольная вариация некоторой скалярной функции  $p_3$  может быть представлена следующим образом:  $\delta p_3 = \vec{\chi} \nabla p_3 dp$ , где  $\vec{\chi}$  — произвольный вектор. Поэтому составляющая вариации (4.2.1) вдоль оси 2 подгруппы  $2/m$  равна:

$$\begin{aligned} \delta p_3 &= dp \vec{\chi}_2 \nabla p_3 = dp \vec{\chi} (\nabla_\alpha + \nabla_\beta + \nabla_m + \nabla_a) p_3 = \\ &= dp \left( \vec{\chi}_2 \vec{d}_\beta \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma + \vec{d}_\alpha \vec{\chi}_2 \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma + \vec{d}_\alpha \vec{d}_\beta \mathbf{p} \vec{\chi}_2 \vec{a}_\gamma + \vec{d}_\alpha \vec{d}_\beta \mathbf{p} \vec{m} \vec{\chi}_2 \right), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где  $\nabla_\alpha, \nabla_\beta, \nabla_m, \nabla_a$  — дифференциальные операторы, действующие соответственно на векторы  $\vec{d}_{\alpha,\beta}, \vec{m}, \vec{a}$ . В (4.2.4) учтены следующие соотношения, вытекающие из определения оператора (1.1.20):  $\vec{\chi}_2 \nabla_x \vec{x} = \vec{\chi}_2$ ;  $\vec{\chi}_2 \nabla_x \vec{x} = \vec{\chi}_2$ .

Если вдоль оси 2 и плоскости не направлено четное число векторов  $\vec{d}_{\alpha,\beta}, \vec{m}, \vec{a}$ , то, как видно из (4.2.4), во всех слагаемых вдоль указанных направлений окажется нечетное число векторов, ориентированных вдоль  $\vec{\chi}_2$ . Поэтому на основании (4.2.3)

$$\vec{\chi}_2 \nabla p_\vartheta = 0. \quad (4.2.5)$$

Таким образом, мы получаем условие равенства нулю производной эффективной упругооптической постоянной, взятой вдоль нормали к плоскости симметрии. Это условие выполнено, когда вдоль оси 2 и плоскости  $m$  не направлено четное число векторов из группы  $\vec{d}_{\alpha,\beta}, \vec{m}, \vec{a}$ , входящей в определение  $p_\vartheta$ . Заметим, что при выводе (4.2.5) мы воспользовались лишь скалярностью функции  $p_\vartheta$ . Поэтому указанный вывод может быть отнесен к любой скалярной функции, формируемой из материального тензора, имеющего плоскость симметрии, путем свертки его с векторами. Существенно важным является лишь правило четности, обеспечивающее общую плоскость симметрии у этого тензора и соответствующей полиады векторов, с которой осуществляется свертка. В связи с этим хотелось бы обратить внимание читателей на универсальность сформулированного вывода, приложимого к различным задачам кристаллофизики. Заметим также, что для нечетных операций свертки, с помощью которых, например, образуется эффективная электрооптическая постоянная, можно найти аналогичное условие.

Указанная универсальность соотношения (4.2.5) позволяет без особых доказательств распространить его на другие характеристики акустооптического взаимодействия, в частности, акустооптическое качество  $M$ . Это и позволяет нам утверждать, что все рассматриваемые ниже варианты решений могут быть без существенных изменений распространены и на этот случай. Различия сводятся лишь к объему требуемых вычислений. Принципиальные коррективы в схему вычислений при этом не вносятся.

Задача, определенная уравнениями (4.2.1), (4.2.2) и дополненная условием четности ориентированных вдоль оси 2 и плоскости  $m$  векторных функций, эквивалентна теперь уравнению:

$$\vec{\chi}_m \nabla p_\vartheta = \vec{\chi}_m \nabla \vec{d}_\alpha \vec{d}_\beta \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma = 0, \quad (4.2.6)$$

где  $\vec{\chi}_m$  — единичный вектор, лежащий в плоскости симметрии. В остальном этот вектор произволен.

Мы свели задачу поиска экстремумов функции  $p_\vartheta$  к условию равенства нулю ее производной, взятой вдоль плоскости симметрии  $m$ . Остается теперь найти такие решения уравнения (4.2.6) или, иными словами, такие направления векторов в плоскости  $m$ , которые удовлетворяли бы уравнениям связи (4.2.2). Из дальнейших разделов этой главы будет видно, что в такой формулировке задача решается относительно просто.

В группу симметрии материальных тензоров конкретного кристалла может войти большое число плоскостей симметрии (подгрупп  $2/m$ ). Уравнение (4.2.6) при этом следует решить для каждой из этих плоскостей. Только в этом случае



будет найден весь набор экстремальных направлений акустооптического взаимодействия соответствующего кристалла, связанных с его группой симметрии.

Из абсолютной ограниченности функции  $p_{\varepsilon}$  прямо следует вывод о существовании экстремумов  $p_{\varepsilon}$  независимо от наличия тех или иных элементов симметрии. По этой причине экстремумы  $p_{\varepsilon}$  существуют и у кристаллов триклинной сингонии. Не исключены экстремальные направления, не связанные с элементами симметрии и у высокосимметричных кристаллов. Однако хотелось бы заметить, что в кристаллах, имеющих оси симметрии четного порядка и плоскости симметрии, наличие таких не связанных с симметрией направлений маловероятно.

Дело в том, что анализ аналогичной задачи, относящейся к электрооптическому эффекту и к настоящему времени решенной до конца [ ], показывает, что уже для моноклинных кристаллов, имеющих только одно физически выделенное направление (ось 2 или плоскость  $m$ ), не связанное с симметрией, решения испытывают определенное влияние элементов симметрии. Для всех кристаллов, имеющих подгруппу  $mmm$ , эти решения стягиваются к плоскостям, образующим углы  $45^\circ$  с плоскостями симметрии, т. е. фактически также локализованы симметрией. По этой причине у большинства электрооптических кристаллов нет экстремальных направлений, не связанных с симметрией. Дополнительные условия, например, продольности или поперечности электрооптического эффекта, только усиливают ориентирующее влияние симметрии.

Следует заметить, что с ростом числа дополнительных связей, особенно в тех случаях, когда они имеют общую группу симметрии, ее ориентирующая роль усиливается. Естественно поэтому утверждать, что в случае акустооптики, когда решения должны удовлетворять трем различным материальным уравнениям, произвол в разбросе конкретных величин материальных коэффициентов соответствующих тензоров и ориентирующая роль элементов симметрии существенно сильнее сказываются на положении экстремумов, подчеркивая те из них, которые связаны с симметрией, и практически исключая свободные направления.

### 4.3 Экстремумы изотропной дифракции

При изотропной дифракции света векторы поляризации падающей и дифрагировавшей волн в первом приближении можно считать совпадающими:  $\vec{d}_{\alpha} = \vec{d}_{\beta} = \vec{d}_{\pm 1}$ . Поэтому уравнение (4.2.6) приобретает вид

$$\vec{\chi}_m \nabla \left( \vec{d}_{\alpha} \vec{d}_{\alpha} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_{\gamma} \right) = 0. \quad (4.3.1)$$

Из правила четности, поскольку диаду  $\vec{d}_{\alpha} \vec{d}_{\alpha}$  в данном случае мы не можем разбить, возможные варианты выбора решений сводятся к ориентации обоих векторов упругой волны  $\vec{m}$ ,  $\vec{a}_{\gamma}$  вдоль оси 2, либо вдоль плоскости  $m$ . При этом диада  $\vec{d}_{\alpha} \vec{d}_{\alpha}$  может быть ориентирована как вдоль оси 2, так и вдоль плоскости  $m$ , так как ее ориентация не влияет на четность ориентации векторов. Поэтому общее число возможных вариантов решений уравнения (4.3.1) сводится к четырем.

В качестве опорной системы координат будем использовать систему с базисом  $\vec{\xi}_{0i}$ , считая  $\vec{\xi}_{03}$  параллельной оси 2 ( $\vec{\xi}_{03} \parallel 2$ ). Не ограничивая общности, можно считать эту систему координат главной. В противном случае, по известным правилам преобразования координат тензоров следует перейти от координатной системы, в которой тензор  $\mathbf{p}$  задан, к базису  $\vec{\xi}_{0i}$ , использованному ниже. Этот же пересчет можно выполнить по формулам  $p_{ijkl} = \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \mathbf{p} \vec{\xi}_{0k} \vec{\xi}_{0l}$ , считая известными направляющие косинусы  $\vec{\xi}_{0i}$  по отношению к базису исходной системы координат.

Учитывая, что локальные повороты нарушают симметрию тензора  $\mathbf{p}$  относительно перестановок  $ij \leftrightarrow kl$ , всюду в дальнейшем в этой главе принимается, что  $p_{ijkl} \neq p_{klij}$ . Поскольку  $2 \parallel \vec{\xi}_{03}$ , все координаты  $p_{ijkl}$ , в которых индекс „3“ встречается нечетное число раз, оказываются равными нулю. Для справок приводим вид матрицы  $p_{\mu\nu}$  тензора  $\mathbf{p}$ , имеющего только одну подгруппу  $2/m$  ( $\vec{\xi}_{03} \parallel 2$ ):

$$(p_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & p_{36} \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{54} & p_{55} & 0 \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.3.2)$$

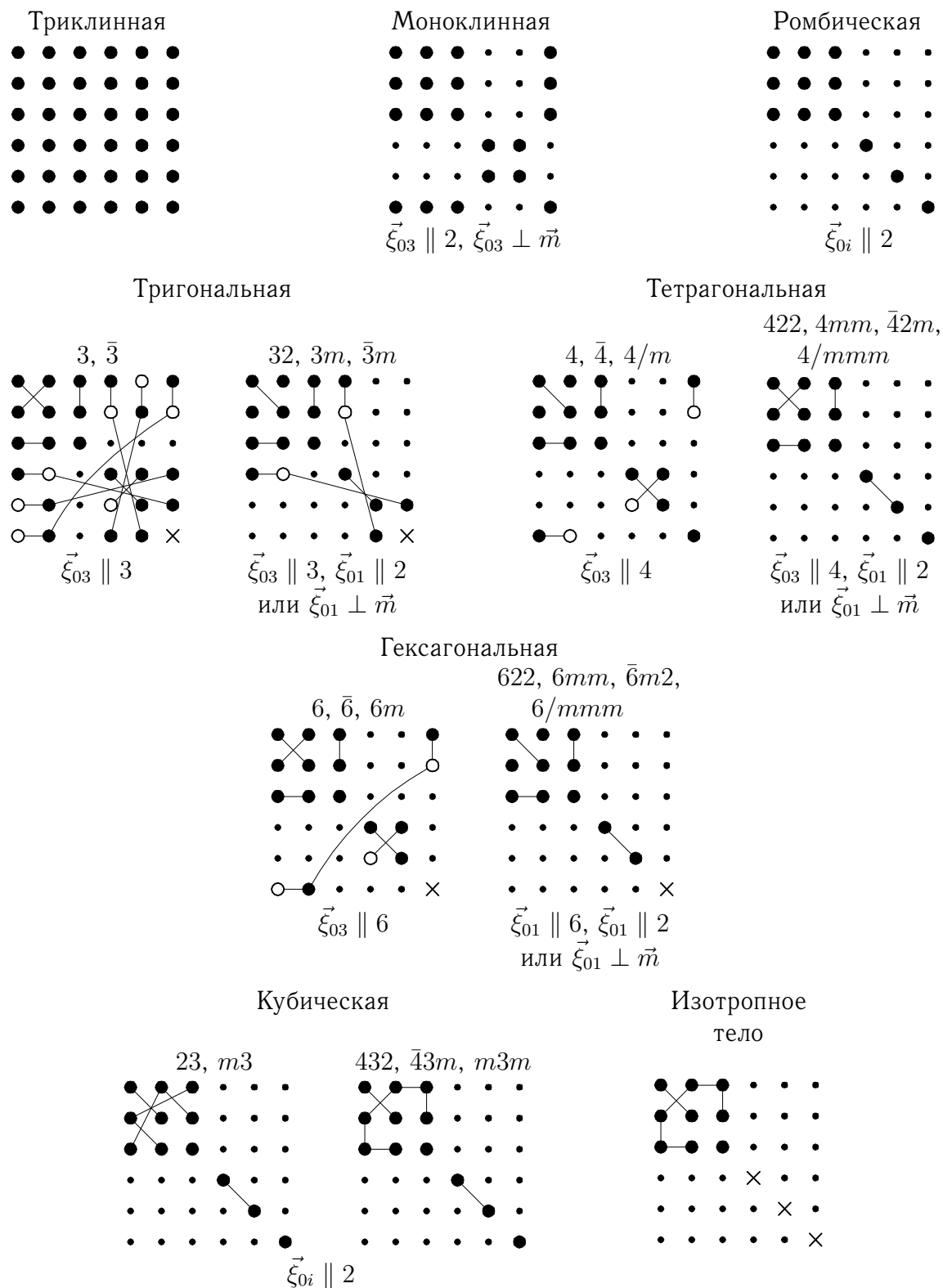
Наличие других элементов симметрии лишь упрощает матрицу (4.3.2). Вид матриц  $p_{\mu\nu}$  для кристаллов всех кристаллографических классов приводится в табл. 4.1. Ниже мы будем приводить также варианты решений для важного частного случая тензоров  $\mathbf{p}$  кристаллов, имеющих подгруппу  $mmm$ . Для существования этой подгруппы достаточно, чтобы тензор  $\mathbf{p}$  имел две ортогональные подгруппы  $2/m$ .

В кристаллах, имеющих подгруппу  $mmm$ , векторы  $\vec{\xi}_{0i}$  направлены вдоль линий пересечения трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии. Применяя (4.2.3), нетрудно показать, что координаты  $p_{ijkl} = 0$ , если среди значений индексов есть хотя бы одно, встречающееся нечетное число раз. Матрица  $p_{\mu\nu}$  имеет в этом случае вид

$$(p_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

**1.** Рассмотрим первый вариант решений, связанный с продольной упругой волной  $\vec{m} = \vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$ . По условию ортогональности  $\vec{m} \perp \vec{d}_0$  волновая нормаль света может лежать только в плоскости симметрии. Взаимная ориентация векторных функций поясняется рис. 4.1. Поскольку для тензора  $\mathbf{\chi}$  также должно быть выполнено условие, аналогичное (4.2.3):  $\vec{\xi}_{03} \mathbf{\chi} \vec{\xi}_{0,\pm 1} = 0$ , вектор  $\vec{\xi}_{03}$  оказывается главной осью тензора  $\mathbf{\chi}$  и в соответствии с (1.2.9) один из собственных векторов поляризации при  $\vec{d}_0 \perp \vec{\xi}_{03}$  совпадает с  $\vec{\xi}_{03}$ , другой лежит в плоскости  $m$ .

Таблица 4.1. Матрицы упругооптических коэффициентов



· — равные нулю коэффициенты; ●, ○ — неравные нулю коэффициенты, имеющие противоположные знаки; × — коэффициент, равный  $(p_{11} - p_{12})/2$ ; равные по величине коэффициенты соединены линиями.

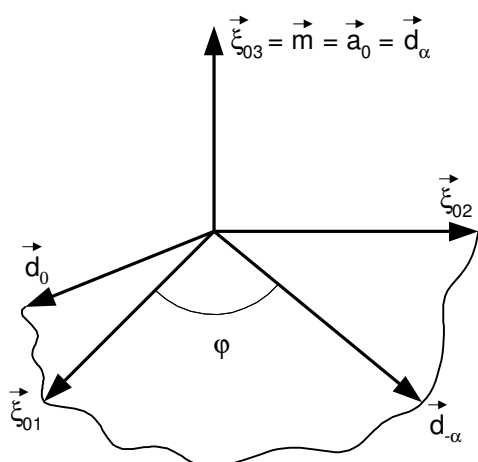


Рис. 4.1. Ориентация векторных функций при изотропной дифракции на предельной упругой волне

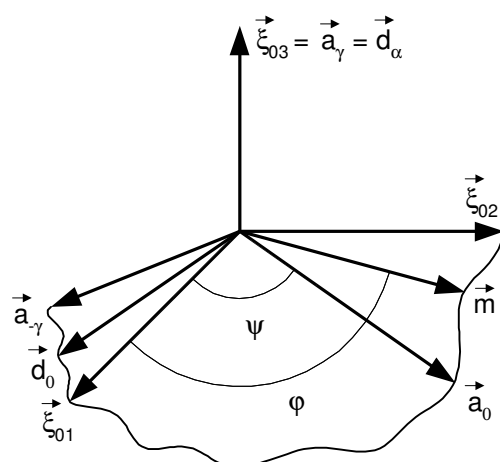


Рис. 4.2. Ориентация векторных функций при изотропной дифракции на упругой волне, распространяющейся в плоскости симметрии

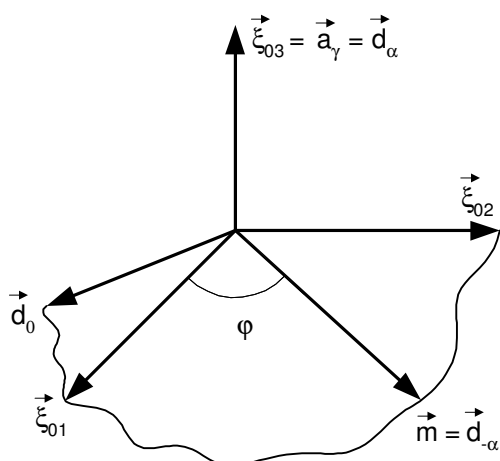


Рис. 4.3. Анизотропная дифракция на сдвиговой упругой волне

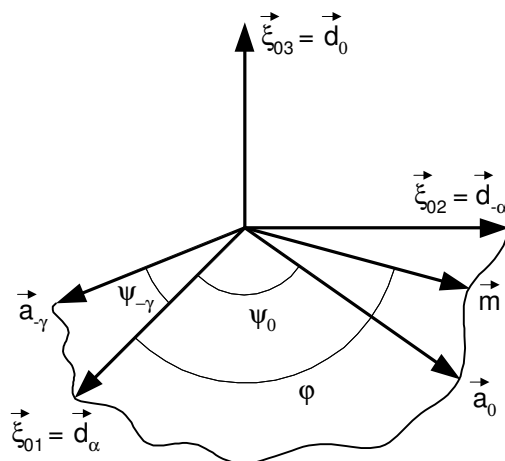


Рис. 4.4. Анизотропная дифракция на квазипродольной и квазисдвиговой волнах

Если  $\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_{03}$ , то получим первое решение:

$$p_\vartheta = \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03} \mathbf{P} \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03} = p_{3333} = p_{33}. \quad (4.3.4)$$

Полученное решение допускает любое направление волновой нормали  $\vec{d}_0$ . Однако это утверждение верно лишь для идеализированного случая  $\vec{d}_0 \perp \vec{m}$ . Если учесть условие Брэгга, вектор  $\vec{d}_0$  должен несколько выйти из плоскости симметрии. В этом случае, используя метод возмущений, мы получим два направления  $\vec{d}_0$ , отвечающих решению задачи.

Решение, соответствующее вектору поляризации  $\vec{d}_{-\alpha}$ , лежащему в плоскости симметрии, найдем, принимая во внимание, что  $\vec{d}_{-\alpha} = \cos \varphi \vec{\xi}_{01} + \sin \varphi \vec{\xi}_{02}$  (см. рис 4.1). Поэтому

$$p_\vartheta = \left( \cos \varphi \vec{\xi}_{01} + \sin \varphi \vec{\xi}_{02} \right) \left( \cos \varphi \vec{\xi}_{01} + \sin \varphi \vec{\xi}_{02} \right) \mathbf{P} \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03}. \quad (4.3.5)$$

Раскрывая скобки и замечая, что  $p_{ijkl} = \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \mathbf{P} \vec{\xi}_{0k} \vec{\xi}_{0l}$ , получим

$$p_\vartheta = p_{13} \cos^2 \varphi + p_{23} \sin^2 \varphi + (1/2)(p_{36} + p_{63}) \sin 2\varphi. \quad (4.3.6)$$

Остается решить уравнение (4.2.1), которое в данном случае имеет вид  $\vec{\chi}_m \nabla p_\vartheta = (\partial/\partial \varphi) p_\vartheta$ . Приравняв к нулю производную  $(\partial/\partial \varphi)$  от функции (4.3.6), легко находим:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = (p_{36} + p_{63}) / (p_{13} - p_{23}). \quad (4.3.7)$$

Зная угол  $\varphi$ , определяемый (4.3.7), можно рассчитать и соответствующую ему эффективную постоянную:

$$p_\vartheta = \frac{1}{2} \left[ p_{13} + p_{23} + \sqrt{(p_{13} - p_{23})^2 + (p_{36} + p_{63})^2} \right].$$

Воспользовавшись матрицей (4.3.3), видим, что при наличии подгруппы  $mmm$  угол  $\varphi = 0$  или  $\pi/2$ , поэтому  $p_\vartheta = p_{13}$  ( $p_{23}$ ).

Эти экстремальные направления жестко фиксированы вдоль осей второго порядка. Хотелось бы подчеркнуть две принципиально важные тенденции. С ростом симметрии жесткость фиксации всех экстремальных направлений возрастает. Все жестко фиксированные направления отвечают тривиальным случаям, когда экстремальное значение  $p_\vartheta$  совпадает с каким-либо из упругооптических коэффициентов. Используя прямую проверку, несложно убедиться в том, что для жестко фиксированных направлений экстремумов обращаются в нуль производные коэффициентов преломления  $\partial n_\alpha / \partial \varphi$  света и фазовой скорости упругой волны  $\partial v_\gamma / \partial \varphi$ . Это равносильно экстремальности  $M$ . Для жестко фиксированных направлений отсутствуют и эффекты сноса света и звука.

**2.** Взаимная ориентация собственных триплетов электромагнитной и упругой волн, когда векторы  $\vec{m}$ ,  $\vec{a}_\gamma$  лежат в плоскости симметрии, поясняется рис. 4.2. Плоскость симметрии в этом случае является также плоскостью симметрии тензора Кристоффеля  $\mathbf{M} = \vec{m} \vec{c} \vec{m}$ , поэтому  $\vec{\xi}_{03} \mathbf{M} \vec{\xi}_{01,2} = 0$ , вектор  $\vec{\xi}_{03}$  совпадает с главной осью тензора  $\mathbf{M}$ , с которой должен совпадать один из собственных векторов поляризации упругой волны — в рассматриваемом варианте

это поперечная волна  $\vec{a}_\gamma = \vec{\xi}_{03} \perp \vec{m}$ . Два оставшихся вектора собственного триплета упругой волны  $\vec{a}_0$  и  $\vec{a}_{-\gamma}$  принадлежат в общем квазипоперечной  $\vec{a}_{-\gamma}$  и квазипродольной  $\vec{a}_0$  волнам.

Допустимы две возможные ориентации волновой нормали  $\vec{d}_0$ : вдоль плоскости  $m$  или оси 2. На рис. 4.2 представлен первый из этих вариантов. Один из собственных векторов поляризации света  $\vec{d}_\alpha$  параллелен  $\vec{\xi}_{03}$ , другой  $\vec{d}_{-\alpha}$  совпадает с волновой нормалью звука. Углы, под которыми направлены векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{a}_0$  по отношению к вектору  $\vec{\xi}_{01}$ , показаны на рис. 4.2.

Из условий четности видно, что в этом варианте решение задачи для поперечной волны  $\vec{a}_\gamma$  отсутствует. Экстремальных значений эффективный акустооптический коэффициент может достигнуть только для волн с поляризацией  $\vec{a}_0, \vec{a}_{-\gamma}$ . Расчет в этом варианте затруднен сложной зависимостью угла  $\psi - \varphi$  между векторами  $\vec{m}$  и  $\vec{a}_0$  от  $\varphi$ . Связь углов  $\varphi$  и  $\psi$  можно найти с помощью уравнения  $\vec{a}_0 \mathbf{M} \vec{a}_{-\gamma} = \vec{a}_0 \vec{m} \mathbf{c} \vec{m} \vec{a}_{-\gamma}$ , являющегося следствием (1.3.5). Расписывая это уравнение по координатам и переходя к матричным представлениям координат  $c_{ijkl}$ , можно получить функцию, связывающую углы  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2c_{16} \cos^2 \varphi + 2c_{26} \sin^2 \varphi + (c_{12} + c_{66}) \sin 2\varphi}{c_{11} \cos^2 \varphi + c_{22} \sin^2 \varphi + c_{66} \cos 2\varphi + (c_{16} - c_{26}) \sin 2\varphi}. \quad (4.3.8)$$

Из двух возможных решений (4.3.8) меньший угол  $\psi_0$  отвечает квазипродольной волне, второй  $\psi_{-\gamma} = (\pi/2) + \psi_0$  — квазипоперечной. Зная зависимость угла  $\psi$  от  $\varphi$ , можно решить уравнение (4.3.1), которое в рассматриваемом варианте сводится к одному из двух следующих:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_{0,-\gamma} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vec{m} \vec{m} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_{0,-\gamma} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Первое из уравнений (4.3.9) отвечает случаю, когда электромагнитная волна поляризована вдоль  $\vec{\xi}_{03}$  ( $\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_{03}$ ), второе — поляризации  $\vec{d}_{-\alpha} = \vec{m}$ . Решения уравнений (4.3.9) соответствуют экстремумам, как на квазипродольной, так и квазипоперечной волнах. Из-за трансцендентности (4.3.8) получить решения уравнений (4.3.9) в явном виде не удастся, однако при расчете конкретных материалов их нетрудно найти, используя стандартные методы численного решения. Следует помнить, что для этих вариантов акустооптического взаимодействия обе упругие волны  $\vec{a}_{0,-\gamma}$  необыкновенны. Для кристаллов, имеющих подгруппу  $mmm$ , формула (4.3.9) несколько упрощается:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2(c_{12} + c_{66}) \sin 2\varphi}{c_{11} \cos^2 \varphi + c_{22} \sin^2 \varphi + c_{66} \cos 2\varphi}.$$

**3.** Последний вариант изотропной дифракции, который остается рассмотреть, отвечает ориентации волновой нормали  $\vec{d}_0$  вдоль  $\vec{\xi}_{03}$  ( $\vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$ ). Поскольку нормаль  $\vec{d}_0$  направлена вдоль одной из главных осей тензора  $\mathbf{\kappa}$ , векторы поляризации  $\vec{d}_{\pm 1}$  должны совпасть с двумя другими осями:  $\vec{d}_{\pm 1} = \vec{\xi}_{01,2}$  (рис. 4.4). Связь углов  $\varphi$  и  $\psi$  и в этом случае определяется формулой (4.3.8), а уравнения



экстремумов приобретают вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vec{\xi}_{0\alpha} \vec{\xi}_{0\alpha} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma \right) = 0 ,$$

где  $\alpha = \pm 1$ ,  $\gamma = 0, -1$ . Таким образом, это уравнение, как и (4.3.9), приводит к четырем возможным вариантам решений.

## 4.4 Экстремумы анизотропной дифракции и коллинеарного взаимодействия

Эффективная акустооптическая постоянная  $p_\beta$  анизотропной дифракции отвечает условию  $\alpha \neq \beta$  — направления поляризации падающей и дифрагировавшей волн различны и в первом приближении могут считаться собственными векторами поляризации для волны, нормаль которой совпадает с нормалью падающей волны. Поэтому уравнение (4.2.6) для анизотропной дифракции принимает вид

$$\vec{\chi}_m \nabla \left( \vec{d}_\alpha \vec{d}_{-\alpha} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma \right) = 0 . \quad (4.4.1)$$

Возможны два варианта ориентации векторных функций в (4.4.1), при которых плоскость симметрии сохраняется. По первому варианту один из векторов поляризации электромагнитной волны  $\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_{03}$  (рис. 4.3), при этом векторы  $\vec{d}_{-\alpha}$  должны лежать в плоскости симметрии. По условию четности в этом случае вдоль  $\vec{\xi}_{03}$  должен быть направлен или вектор поляризации поперечной упругой волны  $\vec{a}_\gamma$ , или ее волновая нормаль  $\vec{m}$ . По второму варианту  $\vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$  совпадает с осью 2, а векторы  $\vec{d}_{\pm\alpha} = \vec{\xi}_{01,2}$ .

1. Рассмотрим первый вариант, отвечающий ориентации векторов, показанной на рис. 4.3. Из условия  $\vec{d}_{-\alpha} \perp \vec{d}_0 \perp \vec{m}$  следует  $\vec{d}_{-\alpha} = \vec{m}$ , поэтому единственным свободным параметром остается угол  $\varphi$ . Считая, что

$$\vec{d}_{-\alpha} = \vec{m} = \vec{\xi}_{01} \cos \varphi + \vec{\xi}_{02} \sin \varphi ,$$

находим

$$p_\beta = \vec{d}_{-\alpha} \vec{d}_\alpha \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_\gamma = \left( \vec{\xi}_{01} \cos \varphi + \vec{\xi}_{02} \sin \varphi \right) \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \left( \vec{\xi}_{01} \cos \varphi + \vec{\xi}_{02} \sin \varphi \right) . \quad (4.4.2)$$

Раскроем скобки и решим уравнение  $\partial p_\beta / \partial \varphi = 0$ . Переходя к матричному представлению тензора  $\mathbf{p}$ , находим

$$\operatorname{tg} 2\varphi = (p_{45} + p_{54}) / (p_{55} - p_{44}) .$$

Этому уравнению удовлетворяют два угла, отличающиеся на  $\pi/2$ .

По формуле (4.4.2) определим соответствующую акустооптическую постоянную:

$$p_\beta = p_{55} \cos^2 \varphi + p_{44} \sin^2 \varphi + (1/2)(p_{45} + p_{54}) \sin 2\varphi .$$

Для подгруппы  $mmm$  коэффициенты  $p_{45} = p_{54} = 0$  (4.3.3), поэтому  $\varphi = 0, \pi/2$ . Отсюда  $p_\beta = p_{55}$  или  $p_\beta = p_{44}$ .

**2.** Если упругая волна распространяется вдоль продольной нормали  $\vec{m} = \vec{\xi}_{03}$ , анизотропная дифракция возможна на любой из двух поперечных волн  $\vec{a}_{\pm 1}$ . Углы, под которыми направлены эти векторы, можно найти, решая уравнение

$$\vec{a}_1 \mathbf{M} \vec{a}_{-1} = \vec{a}_1 \vec{\xi}_{03} \mathbf{c} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{-1} = 0,$$

в которое следует подставить

$$\begin{aligned} a_\gamma &= \vec{\xi}_{01} \cos \psi + \vec{\xi}_{02} \sin \psi; \\ \vec{a}_{-\gamma} &= -\vec{\xi}_{01} \sin \psi + \vec{\xi}_{02} \cos \psi. \end{aligned}$$

Отсюда находим угол  $\psi$ :

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2c_{45}/(c_{55} - c_{44}). \quad (4.4.3)$$

Чтобы решить задачу, остается определить направление вектора  $\vec{d}_{-\alpha}$  — последнего свободного вектора. В принципе это можно сделать, решая уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vec{d}_{-\alpha} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{\pm 1} \right) = 0,$$

в котором единственным неизвестным вектором остается  $\vec{d}_{-\alpha}$ . Однако эту задачу можно решить проще, если заметить, что функция  $\vec{q}_{\pm 1} = \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{\pm 1}$  является известным вектором, если  $\vec{a}_{\pm 1}$  найдены с помощью (4.4.3). Очевидно, что  $p_\vartheta = \vec{d}_{-\alpha} \vec{q}_{\pm 1}$  достигает максимума, когда  $\vec{d}_{-\alpha}$  параллелен вектору  $\vec{q}_{\pm 1} = \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{\pm 1}$ . Эффективная акустооптическая постоянная в этом случае определяется соотношением

$$p_\vartheta^2 = \vec{q}_{\pm 1} \vec{q}_{\pm 1} = \vec{a}_{\pm 1} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{\pm 1}.$$

Если воспользоваться (4.4.3), то получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= (p_{44} \operatorname{tg} \psi + p_{45}) / (p_{54} \operatorname{tg} \psi + p_{55}); \\ p_\vartheta &= p_{55} \cos \psi \cos \varphi + p_{45} \cos \psi \sin \varphi + p_{54} \sin \psi \cos \varphi + p_{44} \sin \psi \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

где угол  $\psi$  определяется (4.4.3), а  $\varphi$  — первой из формул (4.4.4).

Для подгруппы  $mtm$  получаем следующий вариант решений (4.4.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= p_{44}/p_{55}; \\ p_\vartheta &= p_{55} \cos \varphi + p_{44} \sin \varphi = \sqrt{p_{55}^2 + p_{44}^2}. \end{aligned}$$

**3.** Чтобы завершить анализ экстремальных направлений анизотропной дифракции, нам остается рассмотреть случай, когда оба вектора поляризации электромагнитной волны лежат в плоскости симметрии, поэтому  $\vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$  — волновая нормаль параллельна оси симметрии. В этом случае  $\vec{d}_{\pm \alpha}$  совпадают с главными осями  $\vec{\xi}_{01,2}$ . Поскольку  $\vec{d}_0 \perp \vec{m}$ , векторы  $\vec{m}$ ,  $\vec{a}_\gamma$  также лежат в плоскости симметрии (см. рис. 4.4). Поэтому анизотропная дифракция возможна

только на квазипродольной  $\vec{a}_0$  и квазипоперечной  $\vec{a}_{-\gamma}$  волнах. Углы  $\varphi$  и  $\psi$ , которые образуют векторы  $\vec{m}_1$ ,  $\vec{a}_0$  с  $\vec{\xi}_{01}$  связаны соотношением (4.3.7), используя которое можно решить уравнение (4.4.1), в рассматриваемом варианте имеющее вид

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \vec{\xi}_{01} \vec{\xi}_{02} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}_{0,-\gamma} \right) = 0.$$

**4.** Анизотропную дифракцию и коллинеарное взаимодействие объединяет общее условие  $\alpha \neq \beta$ , поскольку и в этом процессе функция состояния поляризации изменяется на ортогональную. В сравнении с анизотропной дифракцией коллинеарное взаимодействие отличается дополнительным условием  $\vec{m} = \vec{d}_0$  — параллельности волновых нормалей упругой и электромагнитной волн. Поскольку вектор  $\vec{d}_0$  непосредственно не входит в уравнение экстремумов, уравнение (4.4.1) определяет и решения задачи для коллинеарного взаимодействия.

Перебирая возможные варианты выбора взаимной ориентации векторов, можно показать, что коллинеарному взаимодействию отвечают два варианта, удовлетворяющих условию четности. По первому варианту продольная упругая и электромагнитная волны распространяются вдоль продольной нормали. Второму варианту отвечает поперечная упругая волна, распространяющаяся в плоскости симметрии.

Рассмотрим первый вариант  $\vec{m} = \vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$ . Эффективная акустооптическая постоянная в этом случае определяется соотношением  $p_{\text{э}} = \vec{d}_{-\alpha} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{a}_{-\gamma}$ , причем векторы  $\vec{d}_{\pm\alpha} \perp \vec{d}_0 = \vec{\xi}_{03}$  лежат в плоскости симметрии, поэтому из условия четности следует  $\vec{a}_{-\gamma} = \vec{a}_0 = \vec{\xi}_{03}$ . Векторы  $\vec{d}_{\pm\alpha}$  направлены вдоль главных осей тензора  $\boldsymbol{\kappa}$ , т. е.  $\vec{d}_{\pm\alpha} = \vec{\xi}_{01,2}$ . Таким образом, все векторы оказываются фиксированными и  $p_{\text{э}} = \vec{\xi}_{01} \vec{\xi}_{02} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{\xi}_{03} = p_{1233} = p_{63}$ .

Если волновые нормали  $\vec{m} = \vec{d}_0$  лежат в плоскости симметрии, то один из векторов поляризации  $\vec{d}_{-\alpha}$  совпадает с  $\vec{\xi}_{03}$ , другой  $\vec{d}_{-\alpha}$  — лежит в плоскости симметрии, поэтому по условию четности вектор поляризации упругой волны  $\vec{a}_{-\gamma} = \vec{\xi}_{03}$ . Поэтому упругая волна является поперечной. Указанная взаимная ориентация волн сохраняется при любом направлении  $\vec{m} = \vec{d}_0$  в плоскости симметрии. Следовательно, остается выбрать угол между векторами  $\vec{m} = \vec{d}_0$  и  $\vec{\xi}_{01}$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \vec{m} = \vec{d}_0 &= \vec{\xi}_{01} \cos \varphi + \vec{\xi}_{02} \sin \varphi; \\ \vec{d}_{-\alpha} &= -\vec{\xi}_{01} \sin \varphi + \vec{\xi}_{02} \cos \varphi, \end{aligned}$$

эффективная акустооптическая постоянная после несложных преобразований и перехода к матричному представлению может быть записана следующим образом:

$$p_{\text{э}} = \vec{d}_{-\alpha} \vec{\xi}_{03} \mathbf{p} \vec{\xi}_{03} \vec{m} = (1/2) [(p_{44} - p_{55}) \sin 2\varphi + (p_{45} + p_{54}) \cos 2\varphi + (p_{54} - p_{45})].$$

Решив уравнение  $\partial p / \partial \varphi$ , находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\varphi &= (p_{55} - p_{44}) / (p_{45} + p_{54}); \\ p_{\text{э}} &= (1/2) \left[ p_{54} - p_{45} + \sqrt{(p_{44} - p_{55})^2 + (p_{45} + p_{54})^2} \right]. \end{aligned}$$

Этим вариантом исчерпываются решения уравнения экстремумов (4.4.1) с дополнительным условием  $\alpha \neq \beta$ , охватывающее режимы анизотропной дифракции и коллинеарного взаимодействия света и звука.

## 4.5 Акустооптические материалы

Такие важные характеристики акустооптических устройств, как дифракционная эффективность и потребляемая мощность, в первую очередь определяются свойствами среды, в которой осуществляется взаимодействие света с ультразвуком. Основным критерием при выборе фотоупругой среды является акустооптическое качество  $M = p_s^2 n^6 / \rho v^3$  [87], которое характеризует эффективность взаимодействия независимо от геометрии светового и акустического пучков<sup>1</sup>. Чем выше качество  $M$ , тем меньшая акустическая мощность требуется для получения необходимой эффективности дифракции.

При малой эффективности взаимодействия и  $\theta_0 = \theta_B$  из (2.1.22) и (2.4.14) следует, что

$$I_d/I_i = \pi^2 M P_a l / 2 \lambda^2 b. \quad (4.5.1)$$

Это соотношение лежит в основе динамических методов измерения  $M$  [2, 5]. Однако прямой расчет по формуле (4.5.1) требует точного знания акустической мощности, что весьма затруднительно. Поэтому значения  $M$  определяются относительно эталонных веществ, параметры которых хорошо известны. В качестве таких веществ обычно применяют воду или плавленый кварц.

В первом случае [87] исследуемый образец помещается в кювету с жидкостью на пути ультразвуковой волны, возбуждаемой короткими импульсами. Измеряется интенсивность дифрагированного света при прохождении лазерного луча через образец ( $I_s$ ) и через воду на одинаковом расстоянии от образца по акустическому пучку ( $I_{r1}$ ,  $I_{r2}$ ). Нетрудно показать, что  $I_s / \sqrt{I_{r1} I_{r2}} = M_s / M_r$  независимо от величины коэффициента отражения ультразвука на границе жидкость-образец и поглощения акустической волны в жидкости и образце. Из этой формулы по известному  $M_r$  рассчитывается качество образца  $M_s$ , а если известны  $n$ ,  $\rho$  и  $v$ , то и эффективная фотоупругая константа  $p_s$ .

Во втором случае [88] эталонный образец с преобразователем прикрепляется торцевой гранью к исследуемому образцу, и регистрируется интенсивность дифрагировавшего света в эталонном и исследуемом образцах при пробегании через них акустического цуга в прямом ( $I_{r1}$ ,  $I_{s1}$ ) и, после отражения от свободной грани, обратном ( $I_{s2}$ ,  $I_{r2}$ ) направлениях. Если измерения для прямого и обратного распространения цуга проводятся в одних и тех же точках образцов, то  $\sqrt{I_{s1} I_{s2} / I_{r1} I_{r2}} = M_s / M_r$  независимо от величины потерь акустической мощности на поглощение и отражение. Хотя этот метод и требует большего времени для определения фотоупругих констант, но зато он позволяет проводить измерения не только на продольных, но и сдвиговых акустических волнах и на более высоких частотах.

Наряду с качеством  $M$ , для оценки фотоупругих материалов используются применительно к конкретным устройствам и несколько отличные характери-

<sup>1</sup>В литературе эта величина часто обозначается как  $M_2$ .

ки. В акустооптических устройствах важно не только получить определенную эффективность дифракции, но также необходимо обеспечить ее существование в некоторой полосе частот. При заданной полосе  $\Delta f$  максимальная ширина акустического пучка  $l$  дается выражением (8.3.6), из которого следует, что  $l \propto nv^2$ . Если это  $l$  подставить в (4.5.1), то получится, что эффективность дифракции с учетом полосы  $\Delta f$  определяется величиной  $M' = p_s^2 n^7 / \rho v$  [125]. Дополнительное условие может быть наложено и на высоту акустического пучка  $b$ . Например, в двумерных дефлекторах (§ 8.3) значение  $b$  ограничивается временем переключения  $\tau = b/v$ . Таким образом,  $b \propto v$ , и мы приходим к величине  $M'' = p_s^2 n^7 / \rho v^2$  [89]. Ограничение апертуры светового пучка, связанное с затуханием ультразвука, дает  $M_\alpha = p_s^2 n^6 / \rho v^4 \alpha^2$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания [93]. Некоторыми авторами вводились и другие величины для характеристики фотоупругой среды, но все они имеют существенно более ограниченную область применения, чем  $M$ .

Значения  $M$ ,  $M'$  и  $M''$  максимальны у материалов, имеющих высокие показатели преломления, большие фотоупругие константы, малую плотность и скорость звука. К сожалению, не все эти свойства совместимы. Например, большой показатель преломления бывает у веществ с высокой плотностью. Пинноу [90] представлены рекомендации, которые могут служить основой для целенаправленного поиска новых эффективных фотоупругих материалов. Им показано, что если известны плотность и химический состав вещества, то можно оценить величины  $n$ ,  $p_s$ ,  $v$  и, следовательно, определить вероятное значение  $M$ . Полезность такого подхода была продемонстрирована при синтезе новых материалов —  $\text{PbMoO}_4$  и  $\text{Pb}_2\text{MoO}_5$ . Заметим однако, что рекомендации Пинноу носят ограниченный характер, так как не учитывают анизотропию свойств кристаллов.

Большое акустооптическое качество материала еще не определяет полностью его пригодность для применения в акустооптических устройствах. Необходимо учитывать и другие свойства материала, такие как затухание ультразвука, поглощение света в рабочем диапазоне длин волн, возможность получения образцов достаточного размера и высокого оптического качества, механическая прочность, химическая устойчивость, температурная стабильность параметров и т. д. Среди этих характеристик наиболее важной величиной является затухание звука. С увеличением частоты акустических волн затухание быстро растет, что ограничивает рабочий диапазон  $\Delta f$  (для большинства материалов  $\alpha \propto f^2$  [71, 90, 91]). Есть целый ряд эффективных материалов, которые именно по этой причине не считаются перспективными в акустооптике, например, полистирол, органические кристаллы.

В настоящее время известно большое количество материалов с прекрасными акустооптическими свойствами. К сожалению, у многих из них высокое значение  $M$  получается в основном за счет малой скорости звука. Но известно [90], что низкой скорости упругих волн соответствует, как правило, большая величина  $\alpha$ .

Созданию новых акустооптических материалов и изучению их свойств посвящено много работ. Общее состояние исследований в этой области проанализировано в [90, 91], вопросы выбора сред для акустооптических устройств рассматривались также в [2, 9, 111–113]. Наиболее полно сведения об акустооп-

тических кристаллах представлены в справочнике [71]. Там же читатель может найти и обширную библиографию.

Характеристики акустооптических материалов приведены в табл. 4.2–4.4. В этих таблицах направление распространения света дано без учета угла Брэгга. Поляризация световых волн указана относительно плоскости взаимодействия. Значения коэффициента затухания упругих волн экстраполированы на частоту 1 ГГц в предположении зависимости  $\alpha = \Gamma f^2$ . В скобках указана частота в гигагерцах, на которой проводились измерения. При этом следует учитывать, что квадратичная аппроксимация коэффициента затухания справедлива не для всех материалов.

Исторически первыми веществами, которые начали применяться в акустооптике, были жидкости [126]. Из табл. 4.2 видно, что некоторые жидкости имеют очень высокие значения  $M$ . Однако большое поглощение звука не позволяет использовать их на частотах выше 50 МГц. Недостатком являются и такие характерные для жидких сред явления, как кавитация и конвекция. В настоящее время жидкости в акустооптических устройствах используются редко: их место заняли твердотельные материалы — кристаллы и стеклообразные вещества.

Из достоинств стеклообразных материалов (табл. 4.3) можно отметить следующие: высокая оптическая однородность, возможность получения образцов большого размера и произвольной формы, простота изготовления, низкая стоимость. Однако акустооптическое качество у них в среднем ниже, а затухание звука — выше, чем в кристаллах. Среди стеклообразных материалов особенно большие значения  $M$  имеют халькогенидные стекла:  $\text{As}_2\text{S}_3$ ,  $\text{As}_2\text{Se}_3$ ,  $\text{As-S-Ge}$ ,  $\text{As-Se-Ge}$  [114, 115]. Плавленый кварц  $\text{SiO}_2$  хотя и не отличается большой величиной  $M$ , но благодаря высокому оптическому качеству и малому затуханию звука он широко используется в акустооптике, особенно для внутрирезонаторного управления лазерами и в качестве эталонного материала при измерении  $M$ .

Важность кристаллических сред для акустооптики определяется не только высокими значениями  $M$ , но и тем, что они позволяют создать устройства, для работы которых анизотропия кристаллов принципиально необходима. Среди кристаллов в первую очередь следует отметить  $\text{TeO}_2$ ,  $\text{PbMoO}_4$ ,  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{Ge}$ ,  $\alpha\text{-HfO}_3$  (табл. 4.4).

Молибдат свинца  $\text{PbMoO}_4$  — один из наиболее распространенных акустооптических кристаллов. Его свойства описаны в работах [94–96]. Технология выращивания этого кристалла хорошо разработана. Удаётся получать монокристаллы большого размера (до 4 см в диаметре и 12 см длиной) и высокого оптического качества.

По качеству  $M$  йодноватая кислота  $\alpha\text{-HfO}_3$  превосходит молибдат свинца более, чем в 2 раза [97]. Этот кристалл отличается также низким уровнем акустических потерь и хорошим оптическим качеством. Но в работе он неудобен, так как растворяется в воде, химически активен, разлагается при температуре выше 110°C.

Уникальными акустооптическими свойствами обладает парателлури́т  $\text{TeO}_2$ . Он широко применяется в самых различных устройствах, особенно широкоапертурных — дефлекторах, спектроанализаторах, неколлинеарных фильтрах и др. Парателлури́т — это одноосный положительный кристалл ( $N_o = 2,26$ ;



Таблица 4.2. Акустооптические свойства жидкостей [93, 106]

Материал	$n$	$v \cdot 10^{-3}$ , м/с	$\Gamma \cdot 10^{-2}$ , дБ/(м·Гц <sup>2</sup> )	$M \cdot 10^{15}$ , с <sup>3</sup> /кг	$M' \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> с/кг	$M'' \cdot 10^{11}$ , мс <sup>2</sup> /кг
Вода H <sub>2</sub> O	1,33	1,49	2400	126	37,2	25
Этиловый спирт C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	1,37	1,15	5600	415	74	65
Четыреххло- ристый углерод CCl <sub>4</sub>	1,46	0,92	48000	840	104	113
п-гексан C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	1,37	1,09	7600	815	133	122
Бензол C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1,49	1,29	71000	645	160	124
Нитробензол C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> NO <sub>2</sub>	1,53	1,46	7200	410	134	92
Ацетон C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O	1,37	1,16	6200	440	81	70
Хлороформ CHCl <sub>3</sub>	1,46	0,98	35000	610	84	86
Йодистый метилен CH <sub>2</sub> I <sub>2</sub>	1,76	0,96	22000	1010	162	169
Йодистый пропил C <sub>3</sub> H <sub>7</sub> I	1,51	0,93	4600	1240	161	174

Таблица 4.3. Акустооптические свойства стекол

Материал	Область прозрачности, мкм	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Акустическая волна			Световая волна			$M \cdot 10^{15}$ , с <sup>3</sup> /кг	$M' \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> с/кг	$M'' \cdot 10^{11}$ , мс <sup>2</sup> /кг	Литература
			Тип	$v \cdot 10^{-3}$ , м/с	$\Gamma \cdot 10^{-2}$ , дБ/(м·ГГц <sup>2</sup> )	$\lambda$ , мкм	$n$	Поляризация				
SiO <sub>2</sub>	0,2–4,5	2,20	пр.	5,96	12 (0,5)	0,63	1,457	⊥	1,56	8,05	1,35	[89, 91]
			поп.	3,76	9 (0,5)			, ⊥	0,47	0,96	0,26	
As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	0,6–11	3,20	пр.	2,6	170	0,63	2,61	⊥	433	762	293	[89, 91]
TeO <sub>2</sub>	0,47–2,7	5,87	пр.	3,40	300 (0,1)	0,63	2,089		23,9	58,1	17,1	[91]
HgAsS <sub>2</sub>	0,64–13		пр.	2,43	20	0,63	2,7	, ⊥	1200	1900	780	[10]
ТФ7		4,52	пр.	3,63	220 (0,1)	0,63	1,728	⊥	5,12	11,7	3,2	[113, 116]
ТФ10		5,19	пр.	3,7	710 (0,07)	0,63	1,806	⊥	7,34	18,1	4,9	[116]
СТФ2		6,12	пр.	3,2	550 (0,07)	0,63	2,16	⊥	9,7	21,5	6,7	[116]
As <sub>12</sub> Se <sub>55</sub> Ge <sub>33</sub>	1–14	4,40	пр.	2,52	29 (0,5)	1,06	2,7	⊥	248	418	165	[91, 115]
Se	1–20	4,27	пр.	1,83		1,15	2,497	⊥	1206	1012	552	[91]
As <sub>2</sub> Se <sub>3</sub>	0,9–11	4,64	пр.	2,25	280 (0,2)	1,15	2,893		1090	1600	710	[91, 114]

Таблица 4.4: Акустооптические свойства кристаллов

Материал	Класс	Область прозрачности, мкм	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Акустическая волна			Световая волна			$M \cdot 10^{15}$ , с <sup>3</sup> /кг	$M' \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> с/кг	$M'' \cdot 10^{11}$ , мс <sup>2</sup> /кг	$M/\Gamma \cdot 10^{13}$	Литература
				Направление, поляризация	$v \cdot 10^{-3}$ , м/с	$\Gamma \cdot 10^{-2}$ , дБ/(м·Гц <sup>2</sup> )	Направление, поляризация	$\lambda$ , мкм	$n$					
$\alpha$ -HfO <sub>3</sub>	222	0,3–1,8	5,0	[001], [001] [100], [100]	2,44 3,56	10 (0,45)	[010], $\perp$ [100], $\perp$	0,63	1,986 1,960	86 80	103 93	42 38	8,6	[90, 97]
PbMoO <sub>4</sub>	4/ <i>m</i>	0,42–5,5	6,95	[001], [001]	3,63	15 (0,5)	[001], $\parallel$ [010], $\parallel$	0,63	1,986 2,262	50 36,3	125 108	35 29,8	2,4	[94, 95]
TeO <sub>2</sub>	422	0,35–5	6,0	[001], [001]	4,20	10 (0,5)	[010], $\perp$ [010], $\parallel$	0,63	2,260 2,412	34,5 25,6	138 109	32,8 25,9	3,5	[71, 91, 101–103]
Pb <sub>5</sub> (GeO <sub>4</sub> )(VO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	6/ <i>m</i>	0,52–5,5	7,15	[110], [1 $\bar{1}$ 0] [001], [001]	0,616 3,45	240 (0,5) 23 (0,3)	[001], круг. [010], $\parallel$	0,63	2,260 2,275	1200 50,6		39,7	2,2	[71, 91]
Pb <sub>2</sub> MoO <sub>5</sub>	2/ <i>m</i>	0,4–5	7,1	[100], [100]	2,96	23 (0,5)	[001], $\perp$	0,63	2,183	127	242	82	5,5	[71, 91]
$\alpha$ -HgS	32	0,62–16	8,1	[001], [001]	2,45	28 (0,5)	[010], $\perp$	0,63	2,887	960	1670	680	34	[71, 91]
Tl <sub>3</sub> AsS <sub>4</sub>		0,6–12	6,2	[001], [001]	2,15	29 (0,4)	[100], $\parallel$	0,63	2,825	820	1220	560	28	[71]
Ag <sub>3</sub> AsS <sub>3</sub>	3 <i>m</i>	0,6–13	5,6	[001], [001]	2,60	30 (0,56)	[010], $\perp$	0,63	3,0	300	610	230	10	[71, 107, 110]
LiTaO <sub>3</sub>	3 <i>m</i>	0,4–5	7,45	[001], [001]	6,19	0,1 (0,5)	$\parallel$	0,63	2,18	1,37	11,4	1,84	13,7	[71, 89]
LiNbO <sub>3</sub>	3 <i>m</i>	0,4–4,5	4,63	[100], [100] [001], [010]	6,57 3,59	0,15 2,6	см. [85] [100], $\perp$	0,63		7,0 2,29	66,5 2,92	10,1 2,4	47 1,12	[71, 88, 89, 91, 108]

См. продолжение

Продолжение табл. 4.4

Материал	Класс	Область прозрачности, мкм	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Акустическая волна			Световая волна			$M \cdot 10^{15}$ , с <sup>3</sup> /кг	$M' \cdot 10^8$ , м <sup>2</sup> с/кг	$M'' \cdot 10^{11}$ , мс <sup>2</sup> /кг	$M/\Gamma \cdot 10^{13}$	Литература
				Направление, поляризация	$v \cdot 10^{-3}$ , м/с	$\Gamma \cdot 10^{-2}$ , дБ/(м·Гц <sup>2</sup> )	Направление, поляризация	$\lambda$ , мкм	$n$					
$\alpha$ -Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$\bar{3}m$	0,15–6,5	4,0	[100], [100]	11,0	0,2		0,63	1,766	0,37	7,7	0,70	1,9	[89, 108]
$\alpha$ -SiO <sub>2</sub>	32	0,12–4,5	2,65	[100], [100]	5,72	3,0	[010], $\perp$	0,59	1,553	2,38	12,1	2,11	0,79	[91]
Sr <sub>0,75</sub> B <sub>0,25</sub> Nb <sub>2</sub> O <sub>6</sub>	4mm	0,4–6	5,4	[001], [001]	5,5	4		0,63	2,3	38,6	268	48,8	9,7	[91]
GaP	$\bar{4}3m$	0,6–10	4,13	[110], [110]	6,32	6 (0,4)	, $\perp$	0,63	3,31	44,6	590	93,5	7,4	[89, 91]
KRS-5	$m3m$	0,53–50	7,37	[111], [111]	1,92	40		0,63	2,57	1150	1090	570	29	[92, 111]
KRS-6	$m3m$	0,4–25	7,19	[111], [111]	2,28	90		0,63	2,31	150	185	81	1,7	[111]
$\alpha$ -Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	4/mmm	0,38–28	7,19	[110], [110]	0,347		, $\perp$	0,63		640				[109]
GaAs	$\bar{4}3m$	1–15	5,3	[110], [110]	5,15	45 (0,2)		1,15	3,37	104	925	179	2,3	[71, 89, 144]
Tl <sub>3</sub> PSe <sub>4</sub>		0,85–8	6,1	[001], [001]	2,2	140		1,15	2,9	2140	2950	1340	15	[71]
Tl <sub>3</sub> AsSe <sub>3</sub>	3m	1,23–18	7,83	[100], [100]	2,10	310 (0,03)	$\perp$	3,39	3,15	650	990	460	2,1	[71]
Ge	$m3m$	2–20	5,38	[111], [111]	5,50	30	[112],	10,6	4,0	260	3150	570	8,7	[71, 105]
Te	32	4–20	5,25	[100], [100]	2,29	420	[010], $\perp$	10,6	6,24	5850	19200	8360	14	[119]
Si	$m3m$	1,5–10	2,33	[111], [111]	9,85	5,6		10,6	3,42	6,2	206	20,9	1,1	[71, 91, 145]
InSb	$\bar{4}3m$	8–30	5,76	[100], [100]	3,42		[001], $\perp$	10,6	3,95	5600				[120]

$N_e = 2,41$  при  $\lambda = 0,63$  мкм), прозрачный во всем видимом и ближнем ИК диапазонах. Кристалл оптически активен; удельное вращение  $\sigma = 870$  град/см. Благодаря чрезвычайно низкой скорости поперечных упругих волн в направлении [110] получается очень большое значение качества  $M$ , причем достигается оно при анизотропной дифракции. Но эта акустическая мода характеризуется также и высоким коэффициентом затухания. Акустические свойства  $\text{TeO}_2$  исследовались в работах [99–102], фотоупругие — в [102, 103].

В рассмотренных кристаллах затухание упругих волн ограничивает рабочий диапазон частотами  $\sim 500$  МГц. Для более высоких частот (1–3 ГГц) столь же эффективных материалов пока не найдено. Наилучшим является ниобат лития  $\text{LiNbO}_3$  — отрицательный ( $N_o = 2,29$ ;  $N_e = 2,20$  при  $\lambda = 0,63$  мкм) сегнетоэлектрический кристалл, который отличается редким сочетанием разнообразных физических свойств: акустических, электрооптических, нелинейнооптических и др. [71]. Ниобат лития — хороший пьезоэлектрик, что определяет его широкое применение в преобразователях для объемных и планарных акустооптических устройств; в последнем случае  $\text{LiNbO}_3$  одновременно выступает и как среда, в которой происходит взаимодействие света с ультразвуком [1, 8]. С использованием этого кристалла выполнены многие эксперименты по исследованию анизотропной дифракции и устройств на ее основе [57, 74, 207].

С увеличением длины волны света потребляемая акустооптическими устройствами мощность быстро возрастает. Поэтому для работы в ИК диапазоне требуются среды с очень высокими значениями качества  $M$ . Из известных материалов наибольшую величину  $M$  в диапазоне 10 мкм имеет теллур [119]. Однако значительное поглощение оптического излучения в этом кристалле и температурная нестабильность препятствуют широкому применению теллура в акустооптике. Поэтому при создании устройств для ИК диапазона, особенно серийных, предпочтение отдается германию — материалу с хорошими оптическими и акустическими характеристиками.

Фотоупругие коэффициенты наиболее распространенных акустооптических материалов приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5. Упругооптические коэффициенты материалов

Материал	$\lambda$ , мкм	$p_{11}$	$p_{12}$	$p_{13}$	$p_{14}$	$p_{16}$	$p_{21}$	$p_{22}$	$p_{23}$
Плавленный кварц	0,63	+0,121	+0,270	0	0	0	0	0	0
As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	0,63	+0,277	+0,272	0	0	0	0	0	0
GaP	0,63	−0,151	−0,082	0	0	0	0	0	0
KRS-5	0,63	0,21	0,26	0	0	0	0	0	0
LiNbO <sub>3</sub>	0,63	0,026	+0,090	0,133	−0,075	0	+0,090	0,026	0,133
TeO <sub>2</sub>	0,63	0,0074	+0,187	+0,340	0	0	+0,187	0,0074	+0,340
PbMoO <sub>4</sub>	0,63	0,24	0,24	0,255	0	0,017	0,24	0,24	0,255
$\alpha$ -HfO <sub>3</sub>	0,63	0,406	0,277	0,304	0	0	0,279	0,343	0,305
Ag <sub>3</sub> AsS <sub>3</sub>	0,63	0,088	0,104	0,110	—	0	0,104	0,088	0,110
$\alpha$ -Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	0,63	0,551	0,440	0,256	0	0	0,440	0,551	0,256
CaMoO <sub>4</sub>	0,63	0,17	−0,15	−0,08	0	0,03	−0,15	0,17	−0,08
GaAs	1,15	−0,165	−0,140	0	0	0	0	0	0
Ge	10,6	−0,154	−0,126	0	0	0	0	0	0
Te	10,6	0,164	0,138	0,146	—	0	0,138	0,164	0,146

См. *продолжение*



Продолжение табл. 4.5

Материал	$p_{31}$	$p_{32}$	$p_{33}$	$p_{41}$	$p_{44}$	$p_{45}$	$p_{55}$	$p_{61}$	$p_{66}$	Литература
Плавленный кварц	0	0	0	0	-0,075	0	0	0	0	[89]
As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	0	0	0	0	+0,0025	0	0	0	0	[89]
GaP	0	0	0	0	-0,074	0	0	0	0	[89]
KRS-5	0	0	0	0	0,141	0	0	0	0	[92]
LiNbO <sub>3</sub>	+0,179	+0,179	+0,071	-0,151	0,146	0	0,146	0	-0,053	[104]
TeO <sub>2</sub>	+0,0905	+0,0905	+0,240	0	-0,17	0	-0,17	0	-0,0463	[102]
PbMoO <sub>4</sub>	0,175	0,175	0,300	0	0,067	0,01	0,067	0,013	0,05	[71]
$\alpha$ -HfO <sub>3</sub>	0,503	0,310	0,334	0	0,27	0	0,2	0	0,092	[71, 97]
Ag <sub>3</sub> AsS <sub>3</sub>	0,174	0,174	0,186	0,01	—	0	—	0	—	[107]
$\alpha$ -Hg <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	0,137	0,137	0,010	0	—	0	—	0	0,047	[109]
CaMoO <sub>4</sub>	0,10	0,10	0,08	0	0,06	0,06	0,06	0,10	0,026	[118]
GaAs	0	0	0	0	-0,072	0	0	0	0	[89]
Ge	0	0	0	0	-0,073	0	0	0	0	[105]
Te	0,086	0,086	0,038	—	—	0	—	0	—	[119]