

## Глава 3

# Дифракция света в анизотропной среде

Первые работы, посвященные особенностям дифракции света на ультразвуке в анизотропных кристаллах, появились в 1967–1968 гг. [55, 56]. В этих работах было отмечено, что падающая световая волна при дифракции на ультразвуке в анизотропной среде в общем случае порождает две дифрагированные световые волны с взаимно ортогональной поляризацией. В работе Диксона [55] специально рассматривался вопрос о видоизменении брэгговского условия в анизотропных средах и о возможности применения особенностей анизотропной дифракции для практических целей. Одной из первых работ, экспериментально показавших преимущества анизотропной дифракции для целей управления оптическим излучением, явилась статья [57], в которой было продемонстрировано значительное расширение полосы частот акустооптического взаимодействия при анизотропной дифракции. В этой же работе было впервые показано, как можно менять характерные частоты анизотропной дифракции в одноосном кристалле при изменении направления падающего света. Подробный расчет углов Брэгга при анизотропной дифракции для одноосных кристаллов проведен в [58], а для двуосных — в [59]. Авторы первых работ по дифракции света в анизотропных средах [55–59] ограничивались анализом геометрических соотношений, вытекающих из векторных диаграмм.

В работах [60–64] впервые задача о такой дифракции решена в строгой постановке, дающей возможность рассчитать интенсивности дифракционных максимумов. Эти работы позволили выяснить физическую причину анизотропной дифракции — появление в среде под действием упругой волны дифракционной решетки с повернутыми собственными векторами поляризации. Кроме того, были предсказаны [60–61] анизотропная дифракция Рамана-Ната, обнаруженная экспериментально в [65], и многофононное брэгговское рассеяние света в анизотропных средах, обнаруженное экспериментально в [66] и подробно исследованное в [67].

### 3.1 Акустооптическое взаимодействие в анизотропной среде

Уравнение дифракции света в прозрачной немагнитной анизотропной среде, лишенной свободных зарядов, может быть введено, исходя из волнового уравнения (1.2.6):

$$(\nabla\tilde{\nabla} - \tilde{\nabla}\nabla)\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon\vec{E}), \quad (3.1.1)$$

где  $\epsilon$  — тензор диэлектрической проницаемости среды. При распространении в среде акустической волны тензор диэлектрической проницаемости изменяется по закону  $\epsilon = \epsilon^0 + \Delta\epsilon \sin(\vec{K}\vec{r} - \Omega t)$ . Компоненты тензора связаны с компонентами тензора деформаций  $\gamma$  следующими соотношениями:

$$\Delta\epsilon_{ij} = \sum_{m,n,k,l} \epsilon_{im}^0 \epsilon_{nj}^0 p_{mnkl} \gamma_{kl}. \quad (3.1.2)$$

В главной системе координат тензора  $\epsilon^0$  соотношение (3.1.2) принимает вид (1.4.19).

Геометрия дифракции света на ультразвуке в анизотропной среде представлена на рис. 3.1 и 3.2. Область взаимодействия света и звука ограничена двумя параллельными плоскостями. Направление, перпендикулярное этим плоскостям, назовем осью  $x$ . Ось  $x$  является направлением изменения амплитуд дифракционных максимумов. Слева на область взаимодействия падает световая волна постоянной амплитуды с волновым вектором  $\vec{k}_{01}$ . В анизотропной среде волновые и лучевые векторы звуковых и световых волн в общем случае не совпадают. Наиболее естественным является случай, когда групповая скорость акустической волны направлена вдоль границ области взаимодействия. Вектор фазовой скорости звука составляет угол  $\Psi$  с вектором групповой скорости. Волновой и лучевой векторы каждой из дифрагированных волн образуют между собой угол  $\psi_{p\alpha}$ .

Решение волнового уравнения (3.1.1) ищем в виде ряда плоских волн с переменными амплитудами  $C_{p\alpha}(x)$ .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=\pm 1} \sum_p \vec{e}_{p\alpha} C_{p\alpha} \exp \left[ j \left( \vec{k}_{p\alpha} \vec{r} - \omega_p t \right) \right], \quad (3.1.3)$$

где  $\vec{e}_{p\alpha}$  — единичные векторы поляризации дифрагированных волн. Суммирование в (3.1.3) по  $\alpha$ , принимающему значения  $\pm 1$ , означает, что при дифракции света в анизотропной среде каждому электромагнитному колебанию с частотой  $\omega_p$  соответствуют две волны, различающиеся направлениями распространения и поляризации. Первый индекс у величин, входящих в правую часть (3.1.3), означает номер дифракционного максимума, а второй индекс связан с поляризацией.

В данном параграфе мы ограничимся рассмотрением дифрагированных волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $x$ . Как было показано в главе 2, пренебрежение дифракцией в обратном направлении эквивалентно отбрасыванию вторых производных по  $x$  в уравнениях для амплитуд дифракционных максимумов.

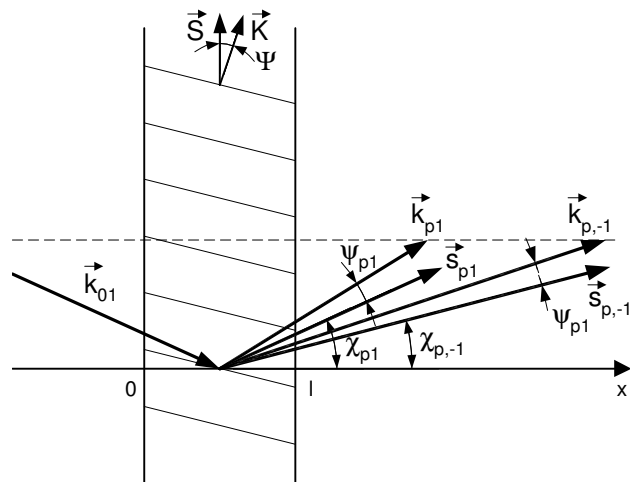


Рис. 3.1. Геометрия акустооптического взаимодействия в анизотропной среде

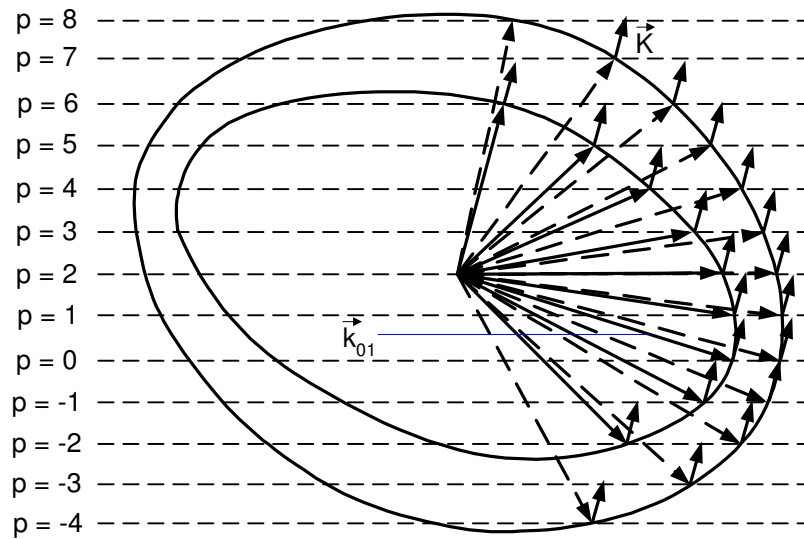


Рис. 3.2. Схема дифракционных максимумов при дифракции в анизотропной среде

На рис. 3.2 изображены сечения волновых поверхностей анизотропной среды. Сплошными стрелками, исходящими из одной точки, на рисунке изображены волновые векторы  $\vec{k}_{p1}$ , имеющие индекс поляризации  $\alpha = 1$ , пунктирными — волновые векторы  $\vec{k}_{p,-1}$ . Каждой из параллельных прямых, изображенных на рис. 3.2, соответствует свой номер дифракционного максимума  $p$ .

Подставляя решение (3.1.3) в волновое уравнение (3.1.1), пренебрегая вторыми производными амплитуд дифракционных максимумов и приравнявая коэффициенты при  $\exp(-j\omega_p t)$ , получаем следующую систему уравнений, связывающую амплитуды  $C_{p\alpha}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} \left\{ C_{p\alpha} \exp(j\vec{k}_{p\alpha} \vec{r}) \left[ \vec{k}_{p\alpha} \vec{k}_{p\alpha} - \vec{k}_{p\alpha} \vec{k}_{p\alpha} - \omega^2 \epsilon^0 / c^2 \right] \vec{e}_{p\alpha} - \right. \\ & \left. - j \frac{dC_{p\alpha}}{dx} \exp(j\vec{k}_{p\alpha} \vec{r}) \left[ 2\vec{k}_{p\alpha} \vec{\xi}_x - \vec{\xi}_x \vec{k}_{p\alpha} - \vec{k}_{p\alpha} \vec{\xi}_x \right] \vec{e}_{p\alpha} \right\} = \\ & = - \sum_{\alpha} \frac{j\omega_p^2}{2c^2} \left\{ C_{p-1,\alpha} \exp \left[ j \left( \vec{k}_{p-1,\alpha} + \vec{K} \right) \vec{r} \right] \Delta \epsilon \vec{e}_{p-1,\alpha} - \right. \\ & \left. - C_{p+1,\alpha} \exp \left[ j \left( \vec{k}_{p+1,\alpha} - \vec{K} \right) \vec{r} \right] \Delta \epsilon \vec{e}_{p+1,\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где  $\vec{\xi}_x$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ .

Для единичного вектора поляризации световой волны в невозмущенной звуком среде  $\vec{e}_{p\alpha}^0$  из волнового уравнения следует соотношение

$$\left( \vec{k}_{p\alpha} \vec{k}_{p\alpha} - \vec{k}_{p\alpha} \vec{k}_{p\alpha} - \omega_p^2 \epsilon^0 / c^2 \right) \vec{e}_{p\alpha} = 0. \quad (3.1.5)$$

Учитывая это соотношение, уравнение (3.1.4) может быть существенно упрощено в тех случаях, когда направления векторов поляризации в среде при наличии упругой волны меняются мало.

Умножая (3.1.4) слева на  $\vec{e}_{p\alpha} \exp(-j\vec{k}_{p\alpha} \vec{r})$  и отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{dC_{p\alpha}}{dx} \vec{e}_{p\alpha} \left( 2\vec{k}_{p\alpha} \vec{\xi}_x - \vec{\xi}_x \vec{k}_{p\alpha} - \vec{k}_{p\alpha} \vec{\xi}_x \right) \vec{e}_{p\alpha} = \\ & = \frac{\omega_p^2}{2c^2} \left\{ C_{p-1,\alpha} \exp[j(k_{p-1,\alpha x} + K_x - k_{p\alpha x})x] \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p-1,\alpha} + \right. \\ & + C_{p-1,-\alpha} \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p-1,-\alpha} \exp[j(k_{p-1,-\alpha x} + K_x - k_{p\alpha x})x] - \\ & - C_{p+1,\alpha} \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p+1,\alpha} \exp[j(k_{p+1,\alpha x} - K_x - k_{p\alpha x})x] - \\ & \left. - C_{p+1,-\alpha} \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p+1,-\alpha} \exp[j(k_{p+1,-\alpha x} - K_x - k_{p\alpha x})x] \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

где  $k_{p\alpha x}$  и  $K_x$  — проекции векторов  $\vec{k}_{p\alpha}$  и  $\vec{K}$  на ось  $x$ .

При выводе уравнения (3.1.6) было учтено, что волновые числа взаимодействующих волн подчиняются следующим соотношениям, вытекающим из граничного условия при  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} k_{p-1,\alpha y} + K_y &= k_{p\alpha y}; & k_{p-1,-\alpha y} + K_y &= k_{p\alpha y}; \\ k_{p-1,\alpha z} + K_z &= k_{p\alpha z}; & k_{p-1,-\alpha z} + K_z &= k_{p\alpha z}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Соотношения (3.1.7) справедливы при любых  $p$ , и из них вытекают равенства  $k_{p\alpha y} = k_{p,-\alpha y}$  и  $k_{p\alpha z} = k_{p,-\alpha z}$ . Следовательно, векторы  $\vec{k}_{p1}$  и  $\vec{k}_{p,-1}$  различаются только проекциями на ось  $x$ , как это и изображено на рис. 3.2.

Система уравнений (3.1.6), описывающая взаимодействие дифрагированных волн в анизотропной среде, отличается от соответствующей системы (2.1.15), описывающей то же явление в среде изотропной, тем, что в анизотропной среде каждый дифракционный максимум оказывается связанным не с двумя, а с четырьмя соседними, из которых два имеют ту же поляризацию, а два других отличаются индексом поляризации. В случае переходов с сохранением индекса поляризации говорят об изотропной дифракции в анизотропной среде (члены первый и третий в правой части (3.1.6)), а в случае переходов с изменением индекса поляризации говорят об анизотропной дифракции (члены второй и четвертый в правой части (3.1.6)).

Множитель, стоящий в (3.1.6) при  $dC_{p\alpha}/dx$ , можно определить, анализируя геометрию взаимодействия света и звука в анизотропной среде:

$$\vec{e}_{p\alpha} \left( 2\vec{k}_{p\alpha}\vec{\xi}_x - \vec{\xi}_x\vec{k}_{p\alpha} - \vec{k}_{p\alpha}\vec{\xi}_x \right) \vec{e}_{p\alpha} = 2|\vec{k}_{p\alpha}| \cos \psi_{p\alpha} \cos \chi_{p\alpha}, \quad (3.1.8)$$

где  $\chi_{p\alpha}$  — угол, который составляет лучевой вектор с осью  $x$  (см. рис. 3.1). Рассмотрим энергетические соотношения, связывающие в анизотропной среде различные дифракционные максимумы. Для этого умножим каждое из уравнений системы (3.1.6) на  $C_{p\alpha}^*$ , а уравнения, комплексно сопряженные (3.1.6), на  $C_{p\alpha}$  и сложим все полученные равенства с учетом (3.1.8). При суммировании все члены в правой части взаимно уничтожаются и получается соотношение такого вида:

$$\sum_{\alpha} \sum_p \frac{|\vec{k}_{p\alpha}| \cos \chi_{p\alpha} \cos \psi_{p\alpha}}{\omega_p^2} \frac{d}{dx} (C_{p\alpha} C_{p\alpha}^*) = 0. \quad (3.1.9)$$

Выражение (3.1.9) представляет собой соотношение Мэнли-Роу для параметрически связанных дифрагированных волн. Поток энергии электромагнитной волны с индексами  $p$  и  $\alpha$  в анизотропной среде через любую плоскость, перпендикулярную оси  $x$ , равен

$$I_{p\alpha} = \frac{cn_{p\alpha} \cos \chi_{p\alpha} \cos \psi_{p\alpha}}{4\pi} C_{p\alpha} C_{p\alpha}^*.$$

Уравнения (3.1.6) могут быть записаны в более компактном виде:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dC_{p\alpha}}{dx} = & q_{\alpha\alpha,p-1} C_{p-1,\alpha} \exp(j\eta_{\alpha\alpha,p-1}x) + \\ & + q_{-\alpha\alpha,p-1} C_{p-1,-\alpha} \exp(j\eta_{-\alpha\alpha,p-1}x) - \\ & - q_{\alpha\alpha,p+1} C_{p+1,\alpha} \exp(-j\eta_{\alpha\alpha,p+1}x) - \\ & - q_{-\alpha\alpha,p+1} C_{p+1,-\alpha} \exp(-j\eta_{-\alpha\alpha,p+1}x), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

где

$$\begin{aligned} q_{\alpha\alpha,p\pm 1} &= \frac{|\vec{k}_{p\alpha}| \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p\pm 1,\alpha}}{2n_{p\alpha}^2 \cos \psi_{p\alpha} \cos \chi_{p\alpha}}; & q_{-\alpha\alpha,p\pm 1} &= \frac{|\vec{k}_{p\alpha}| \vec{e}_{p\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{p\pm 1,-\alpha}}{2n_{p\alpha}^2 \cos \psi_{p\alpha} \cos \chi_{p\alpha}}; \\ \eta_{\alpha\alpha p} &= k_{p\alpha x} + K_x - k_{p+1,\alpha x}; & \eta_{-\alpha\alpha p} &= k_{p\alpha x} + K_x - k_{p+1,-\alpha x}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Параметры  $q$  и  $\eta$  вводимые соотношениями (3.1.11), являются обобщением на анизотропную среду аналогичных параметров  $q_p$  и  $\eta_p$ , соответствующих изотропной среде и определенных в главе 2. Параметры  $q_{\alpha\alpha,p\pm 1}$  пропорциональны величине изменения показателя преломления среды под действием упругой волны, а  $q_{-\alpha\alpha,p\pm 1}$  — углу поворота собственных векторов среды под действием той же упругой волны. Если направление колебаний в акустической волне и свойства среды подобраны так, что происходит только изменение показателя преломления без поворота собственных осей среды, то возможна лишь изотропная дифракция (без смены индекса поляризации). Если, наоборот, под действием акустической волны в среде происходит только поворот собственных осей без изменения показателя преломления, то возможна лишь анизотропная дифракция света. В общем случае в анизотропной среде одновременно не равны нулю  $q_{\alpha\alpha,p\pm 1}$  и  $q_{-\alpha\alpha,p\pm 1}$ . В этом случае одновременно существуют как изотропная, так и анизотропная дифракции.

Эффективность взаимодействия света и звука зависит от коэффициентов фазового рассинхронизма  $\eta_{\alpha\alpha p}$  и  $\eta_{-\alpha\alpha p}$ . Эффективное взаимодействие возможно, если  $\eta l$  удовлетворяет неравенству  $\eta l \leq \pi$ . Поэтому из всего многообразия переходов, описываемых соотношениями (3.1.10), при решении практических задач достаточно учесть небольшое число эффективно взаимодействующих переходов, а остальные отбросить.

Следует отметить, что уравнения (3.1.10) по своей структуре близки к уравнениям (2.5.3), которые были получены для случая дифракции света в изотропных средах на двух бегущих звуковых волнах. Такое совпадение неслучайно. Теорию дифракции смешанного типа можно последовательно строить как теорию дифракции света на параллельно распространяющихся акустических волнах, одна из которых вызывает изотропную, другая — анизотропную дифракцию.

Сравнивая (3.1.11) с (1.4.14) и учитывая (3.1.2), легко понять, что эффективная фотоупругая постоянная при дифракции образуется аналогично (1.4.15), но в качестве векторов поляризации должны быть использованы вектора поляризации взаимодействующих дифракционных максимумов.

## 3.2 Общее решение задачи о дифракции света в анизотропной среде

Общее решение системы дифракционных уравнений (3.1.10) может быть построено по аналогии с общим решением задачи о дифракции света в изотропной среде, приведенным в § 2.4.

Будем считать амплитуды всех дифракционных максимумов компонентами функции  $\mathbf{C}_{p\alpha}(x)$ , которую можно представить в виде матрицы, имеющей большое число строк, нумеруемых индексом  $p$ , и два столбца, отличающихся индексом  $\alpha$ .

Правая часть системы уравнений (3.1.10) представляет собой результат воздействия на эту функцию оператора  $\mathbf{H}_{p\alpha p'\alpha'}(x)$ , а левая часть — удвоенную производную  $\mathbf{C}_{p\alpha}(x)$  по переменной  $x$ . Таким образом, система уравнений (3.1.10)

может быть записана в виде

$$2 \frac{dC_{p\alpha}}{dx} = \mathbf{H}_{p\alpha p'\alpha'} C_{p'\alpha'}(x). \quad (3.2.1)$$

Уравнение (3.2.1) необходимо решать с граничным условием, определяемым световым полем при  $x = 0$ . В этой точке все амплитуды  $C_{p\alpha}$  равны нулю, кроме амплитуды  $C_{01}$ , которая равна единице. Решение уравнения (3.2.1) ищем в виде ряда

$$C_{p\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{p\alpha}^{(i)}. \quad (3.2.2)$$

В качестве нулевого приближения естественно использовать значение  $C_{p\alpha}^{(0)}$ . Подставляя пробное решение в уравнение (3.2.1) и интегрируя по  $x$ , получим рекуррентное соотношение, связывающее  $i$ -й член ряда с  $(i-1)$ -м членом:

$$C_{p\alpha}^{(i)} = \int_0^x \mathbf{H}_{p\alpha p'\alpha'} C_{p'\alpha'}^{(i-1)} dx.$$

С помощью этого соотношения может быть рассчитан любой член ряда  $C_{p\alpha}^{(i)}$ , являющегося точным решением уравнения (3.2.1). Из системы уравнений (3.1.10) видно, что у оператора  $\mathbf{H}_{p\alpha p'\alpha'}$  не равны нулю только те компоненты, для которых  $p' = p \pm 1$ . Это соответствует тому факту, что при каждом последовательном акте рассеяния фотона на фоне индекс  $p$  меняется на единицу.

Выпишем выражения нескольких первых членов ряда (3.2.2):

$$\begin{aligned} C_{p\alpha}^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; & C_{p\alpha}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ C_{11}^{(1)} & C_{1,-1}^{(1)} \\ 0 & 0 \\ C_{-11}^{(1)} & C_{-1,-1}^{(1)} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ C_{p\alpha}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{21}^{(2)} & C_{2,-1}^{(2)} \\ 0 & 0 \\ C_{01}^{(2)} & C_{0,-1}^{(2)} \\ 0 & 0 \\ C_{-21}^{(2)} & C_{-2,-1}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; & C_{p\alpha}^{(3)} &= \begin{pmatrix} C_{31}^{(3)} & C_{3,-1}^{(3)} \\ 0 & 0 \\ C_{11}^{(3)} & C_{1,-1}^{(3)} \\ 0 & 0 \\ C_{-11}^{(3)} & C_{-1,-1}^{(3)} \\ 0 & 0 \\ C_{-31}^{(3)} & C_{-3,-1}^{(3)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

В аналитическом виде могут быть рассчитаны и все коэффициенты, входящие в (3.2.3). Например,

$$\begin{aligned} C_{1\alpha}^{(1)} &= \frac{q_{\alpha 10} x}{2} \operatorname{sinc} \frac{\eta_{1\alpha 0} x}{2\pi} \exp(j\eta_{1\alpha 0} x/2); \\ C_{-1\alpha}^{(1)} &= \frac{q_{\alpha 10} x}{2} \operatorname{sinc} \frac{\eta_{\alpha 1, -1} x}{2\pi} \exp(-j\eta_{\alpha 1, -1} x/2). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

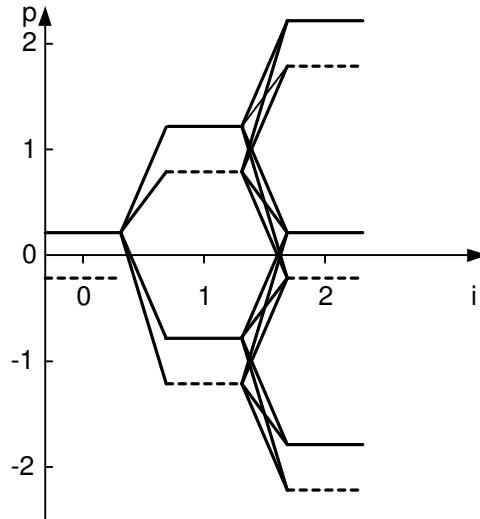


Рис. 3.3. Диаграмма образования дифракционных максимумов в анизотропной среде

Выражения для решения в первом приближении (3.2.4) имеют тот же вид, что и в случае изотропной дифракции (2.4.13), но с соответствующими значениями  $q$  и  $\eta$ . Следующие приближения для дифракции в анизотропной среде могут существенно отличаться от случая дифракции света в изотропной среде из-за расщепления в анизотропной среде каждого дифракционного максимума на два, отличающихся индексом поляризации. Это расщепление приводит к увеличению числа путей фотон-фононного взаимодействия в соответствии с диаграммой переходов, приведенной на рис. 3.3. Сравнение диаграмм переходов, изображенных на рис. 2.11 и рис. 3.3, показывает, что уже во втором приближении для каждого дифракционного максимума в анизотропной среде имеется в два раза больше возможных путей переходов, чем в изотропной среде. Если учесть, что в анизотропной среде падающая волна тоже может иметь две допускаемые средой ортогональные поляризации (пунктирный уровень при  $i = 0$  на рис. 3.3), то решение задачи о дифракции света в анизотропной среде будет отличаться даже в первом приближении от соответствующего решения для изотропной среды. Впрочем, расщепление падающей волны на две компоненты не является принципиальным, так как задача о дифракции света на акустической волне линейна по отношению к световой волне и результат дифракции двух компонент равен сумме результатов, получающихся при дифракции каждой из компонент отдельно. Поэтому в этой главе мы всегда будем считать, что падающая световая волна имеет только одну компоненту с фиксированной поляризацией, соответствующей одной из двух возможных для данной среды поляризаций.

Следует иметь в виду, что не все переходы, изображенные на рис. 3.3, имеют одинаковые вероятности. Вероятность соответствующего перехода определяется величиной  $\eta l$  для этого перехода. Если  $\eta l$  меньше  $\pi$ , то вероятность соответствующего перехода велика. При  $\eta l \gg \pi$  вероятность перехода стремится к нулю.

При дифракции с поворотом плоскости поляризации величина  $\eta$  зависит не



только от угла падения света на ультразвуковой столб и частоты акустической волны, но и от соотношения показателей преломления для двух поляризаций света. Если длина волны ультразвука значительно больше длины световой волны и выполняется условие  $K \ll k$ , то выражение для  $\eta_{\alpha\beta p}$  принимает вид

$$\eta_{\alpha\beta p} = K \operatorname{tg} \theta_0 + \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{K^2}{k_\alpha \cos \theta_0} - k_\beta \frac{n_\beta^2 - n_\alpha^2}{2n_\alpha n_\beta \cos \theta_0}. \quad (3.2.5)$$

Интересно отметить, что при  $n_\alpha = n_\beta$  (3.2.5) переходит в формулу (2.2.2), полученную для случая изотропной дифракции. Существенное отличие (3.2.5) от (2.2.2) состоит в том, что левая часть (2.2.2) становится сколь угодно малой при достаточно малой частоте акустической волны, а в (3.2.5) содержится член (третий в правой части), который не зависит от частоты акустической волны. Это означает, что при дифракции света в изотропной среде на достаточно низкой частоте ультразвука всегда можно наблюдать дифракцию Рамана-Ната, а при дифракции в анизотропной среде дифракция Рамана-Ната может не наблюдаться вовсе, если третий член в правой части (3.2.5) достаточно велик. Однако при малой разности показателей преломления может наблюдаться и анизотропная дифракция Рамана-Ната [65].

Если длина области взаимодействия света и звука  $l$  достаточно велика, а угол падения света  $\theta_0$  подобран так, чтобы  $\eta_{\alpha\beta 1} l$  было достаточно мало, то в анизотропной среде наблюдается дифракция Брэгга, при которой из всех дифракционных максимумов, описываемых (3.1.10), сохраняются только два, удовлетворяющих уравнениям

$$2 \frac{dC_{01}}{dx} = -q_{01} C_{1\alpha} \exp(-j\eta x); \quad 2 \frac{dC_{1\alpha}}{dx} = q_{1\alpha} C_{01} \exp(j\eta x), \quad (3.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= k_{1\alpha x} - k_{01x} - K_x; \\ q_{01} &= \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{\vec{e}_{01} \Delta \epsilon \vec{e}_{1\alpha}}{2 |\vec{k}_{01}| \cos \psi_{01} \cos \chi_{01}}; \\ q_{1\alpha} &= \frac{\omega_1^2}{c^2} \frac{\vec{e}_{1\alpha} \Delta \epsilon \vec{e}_{01}}{2 |\vec{k}_{1\alpha}| \cos \psi_{1\alpha} \cos \chi_{1\alpha}}. \end{aligned}$$

Интегрирование уравнений (3.2.6) с граничными условиями  $C_{01}(0) = 1$ ,  $C_{1\alpha}(0) = 0$  дает следующие выражения для амплитуд дифракционных максимумов:

$$\begin{aligned} C_{01} &= \left[ \cos \left( \sqrt{\eta^2 + q_{01} q_{1\alpha}} x/2 \right) + (1/2) j \eta x \operatorname{sinc} \left( \sqrt{\eta^2 + q_{01} q_{1\alpha}} x/2\pi \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp(-j\eta x/2); \\ C_{1\alpha} &= (1/2) q_{1\alpha} x \operatorname{sinc} \left( \sqrt{\eta^2 + q_{01} q_{1\alpha}} x/2\pi \right) \exp(j\eta x/2). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Сравнение (3.2.7) с (2.2.16) и (2.2.17) показывает, что при дифракции Брэгга основные амплитудные и фазовые соотношения в изотропной и анизотропной

средах, при изотропной и анизотропной дифракции оказываются одинаковыми. Отличия заключаются только в конкретных значениях коэффициентов  $q$  и  $\eta$ .

Следует отметить, что выражения (3.2.7) получаются в том случае, если в анизотропной среде малым является только один коэффициент  $\eta$ . Большая сложность выражения (3.2.5) в сравнении с (2.2.2) приводит к тому, что при определенных условиях одновременно несколько  $\eta_{\alpha\beta p}$  может оказаться малым. В этом случае происходит анизотропная дифракция Брэгга с перекачкой энергии не в один, как в изотропном случае, а в два дифракционных максимума одновременно [66, 67]. Возможна смешанная дифракция Брэгга, когда условия Брэгга выполняются одновременно для одного изотропного и двух анизотропных переходов [67]. В последующих параграфах рассматриваются более подробно различные режимы дифракции света на акустической волне в анизотропной среде.

### 3.3 Анизотропная дифракция Брэгга. Особенности геометрии взаимодействия для кристаллов различных классов

Как было указано в § 2.2, режим брэгговской дифракции осуществляется в предельном случае больших длин области взаимодействия света и звука. В этом случае кванты акустического поля — фононы можно считать распространяющимися в неограниченной среде, а поэтому имеющими точное значение импульса. Сама дифракция может рассматриваться как процесс рассеяния квантов света — фотонов на фононах, происходящий с выполнением законов сохранения энергии и импульса. Эти законы определяют частоты и волновые вектора взаимодействующих волн:

$$\omega_d = \omega_i \pm \Omega; \quad \vec{k}_d = \vec{k}_i \pm \vec{K}, \quad (3.3.1)$$

где  $\omega_i$  и  $\vec{k}_i$ ,  $\omega_d$  и  $\vec{k}_d$  — циклические частоты и волновые векторы падающего и дифрагировавшего света соответственно. Знак плюс в соотношениях (3.3.1) соответствует появлению антистоксовой компоненты рассеяния, а знак минус — стоксовой компоненты. Соотношения (3.3.1) устанавливают определенную связь между волновыми векторами падающего и дифрагированного света, а также ультразвука. В наиболее компактном виде эта связь выражается в форме векторных диаграмм, которые широко используются при качественном анализе процесса дифракции и позволяют сделать ряд количественных выводов для конкретных дифракционных устройств. По существу, векторные диаграммы представляют собой графическое изображение закона сохранения импульса при акустооптическом взаимодействии.

В соответствии с (3.3.1) вектор  $\vec{k}_d$  образуется из волнового вектора падающей волны  $\vec{k}_i$  путем прибавления или вычитания волнового вектора звука  $\vec{K}$ . При этом в общем случае необходимо еще учесть наличие рассинхронизма, который характеризуется вектором  $\eta\vec{\xi}_x$ , где  $\vec{\xi}_x$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ . С помощью векторных диаграмм можно определить направление распространения дифрагированного света, а также величину вектора рассинхронизма, кото-

рая характеризует эффективность соответствующего взаимодействия. В случае дифракции Брэгга, когда длина области взаимодействия достаточно велика, эффективное взаимодействие возможно только для таких условий, при которых  $\eta \rightarrow 0$ . Векторные диаграммы превращаются в этом случае в треугольники, описываемые (3.3.1). Если пренебречь малым изменением частоты света при рассеянии и соответствующим ему изменением показателей преломления, то модули волновых векторов падающей и дифрагированной волн равны соответственно

$$|\vec{k}_i| = 2\pi n_i/\lambda; \quad |\vec{k}_d| = 2\pi n_d/\lambda.$$

Здесь  $n_i$  и  $n_d$  — показатели преломления для падающей и дифрагированной волн,  $\lambda$  — длина волны света в вакууме.

В изотропной среде  $n_i$  и  $n_d$  равны между собой, поэтому (3.3.1) соответствует равнобедренный векторный треугольник, изображенный на рис. 3.4, а. Из векторного треугольника следует, что

$$\sin \theta_i = -\sin \theta_d = \mp \frac{K}{2k_i} = \mp \frac{f\lambda}{2nv}. \quad (3.3.2)$$

Соотношение (3.3.2) описывает в изотропном случае зависимость углов падения и дифракции от частоты акустической волны  $f = \Omega/2\pi$ . Знак плюс в правой части (3.3.2) соответствует антистоксовому рассеянию, знак минус — стоксовому. Из (3.3.2) видно, что дифракция Брэгга в изотропной среде возможна при изменении частоты ультразвука от нуля до  $f_{\text{макс}} = 2nv/\lambda$ .

В анизотропной среде изменение направления света при дифракции приводит к изменению показателя преломления. Поэтому векторный треугольник в анизотропной среде в общем случае не является равнобедренным.  $|\theta_d| \neq |\theta_i|$  и зависимости этих углов от частоты  $f$  становятся довольно сложными. На рис. 3.4, б изображен векторный треугольник для случая антистоксового рассеяния. Из этого треугольника можно определить углы падения и дифракции, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= -\frac{f\lambda}{2n_i v} \left[ 1 + \frac{v^2}{\lambda^2 f^2} (n_i^2 - n_d^2) \right]; \\ \sin \theta_d &= \frac{f\lambda}{2n_d v} \left[ 1 - \frac{v^2}{\lambda^2 f^2} (n_i^2 - n_d^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

В данном параграфе рассматривается дифракция при строгом выполнении условия Брэгга. Поэтому приведенное в (3.3.3) значение угла падения  $\theta_i$  является обобщением на случай анизотропной среды введенного в главе 1 понятия угла Брэгга  $\theta_B$ . Возможность дифракции при рассинхронизме и отличии  $\theta_i$  от  $\theta_B$  в данном параграфе не учитывается. При  $n_i = n_d$  соотношения (3.3.3) переходят в (3.3.2), что показывает их справедливость в самом общем случае дифракции Брэгга. Однако соотношения (3.3.3) еще не дают явной зависимости  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от частоты ультразвука, так как входящие в правую часть (3.3.3) показатели преломления  $n_i$  и  $n_d$  в свою очередь зависят от углов  $\theta_i$  и  $\theta_d$ . Исследуем зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от частоты акустической волны для кристаллов различных классов и различной геометрии акустооптического взаимодействия.



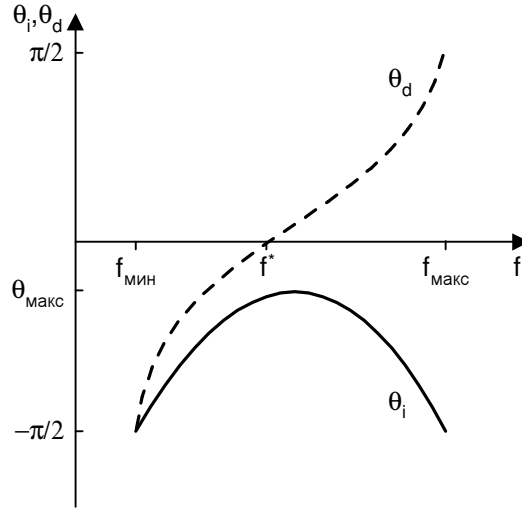


Рис. 3.5. Зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$ . Плоскость взаимодействия ортогональна оптической оси

Начнем рассмотрение этих зависимостей с анализа более простого случая дифракции света в одноосных кристаллах [58]. В этих кристаллах, принадлежащих к тригональной, тетрагональной, гексагональной сингониям, поверхности показателей преломления представляют собой сферу для обыкновенной волны и эллипсоид вращения вокруг оси  $c$  для волны с необыкновенной поляризацией. Эллипсоид касается сферы на оси  $c$ . Кристалл называется положительным, если показатель преломления обыкновенного луча меньше, чем необыкновенного. В противном случае кристалл называется отрицательным. Показатель преломления обыкновенной волны в одноосном кристалле равен  $N_o$  при любом направлении распространения света. Для необыкновенной волны показатель преломления  $n_e$  меняется от значения  $N_o$  для волны, распространяющейся вдоль оси  $c$ , до значения  $N_e$  для волны, распространяющейся перпендикулярно оси  $c$ . Эта зависимость имеет вид (1.2.17).

Будем считать для определенности, что  $N_o > N_e$ .

**1.** Если световая и ультразвуковая волны распространяются в кристалле перпендикулярно оптической оси, то показатель преломления для необыкновенной волны равен  $N_e$ . Пусть падающая волна является обыкновенной, а дифрагированная — необыкновенной. Тогда для всех возможных  $\theta_i$  и  $\theta_d$  концы векторов  $\vec{k}_i$  лежат на окружности радиуса  $2\pi N_o/\lambda$ , а концы векторов  $\vec{k}_d$  — на окружности радиуса  $2\pi N_e/\lambda$ . Эти окружности являются концентрическими с центром в начале координат, откуда исходят  $\vec{k}_i$  и  $\vec{k}_d$  (см. рис. 3.4, в). При заданном направлении  $\vec{K}$  его величина и, следовательно, частота  $f$  определяет углы  $\theta_i$  и  $\theta_d$ . Из векторных диаграмм рис.3.4, в и из соотношений (3.3.3) вытекает, что дифракция в этом случае наблюдается только в определенном диапазоне частот от  $f_{\min}$  до  $f_{\max}$ , выше и ниже которых анизотропная дифракция Брэгга быть не может. Обе предельные частоты соответствуют коллинеарному взаимодействию света и звука. На частоте  $f_{\min} = v(N_o - N_e)/\lambda$  углы  $\theta_i$  и  $\theta_d$  равны  $-\pi/2$ , на частоте  $f_{\max} = v(N_o + N_e)/\lambda$  угол  $\theta_i = -\pi/2$ , а  $\theta_d = \pi/2$ . Зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$  изображена на рис. 3.5. Существенная особенность анизотропной дифрак-

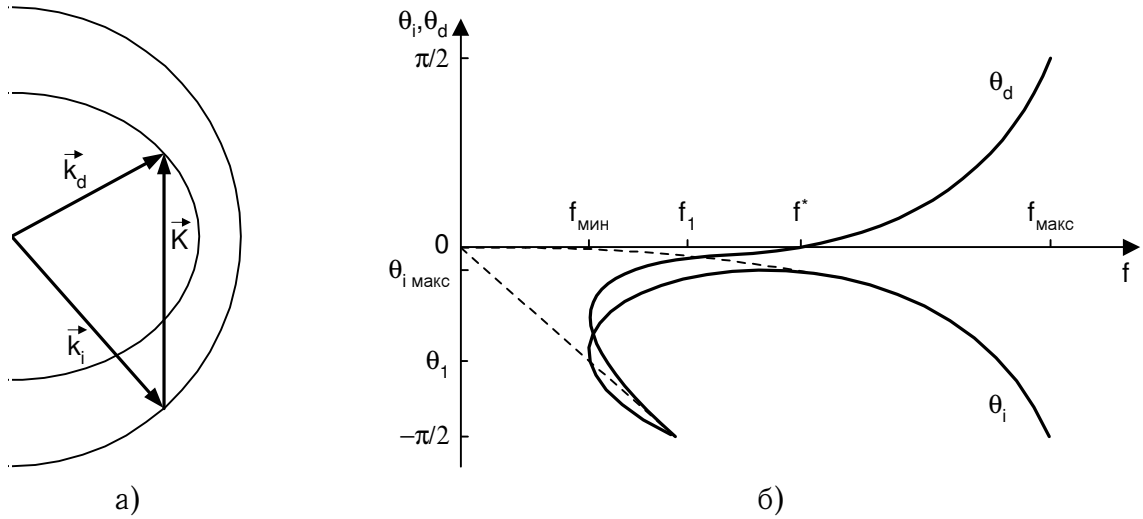


Рис. 3.6. Плоскость взаимодействия образует угол  $\alpha$  с оптической осью;  
 $\vec{K} \perp c$ :

а — векторная диаграмма; б — зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$

ции — наличие экстремального угла падения  $|\theta_{\max}|$ . Этот угол соответствует частоте  $f^* = v \sqrt{N_o^2 - N_e^2} / \lambda$ . Векторная диаграмма на частоте  $f^*$  представляет собой прямоугольный треугольник:  $\theta_d = 0$  и  $\vec{k}_d \perp \vec{K}$ .

Поскольку в точке экстремума  $d\theta_i/df = 0$ , угол  $\theta_i$  квадратично зависит от частоты  $f$ . Эксперимент показал [57], что при частоте  $f^*$  полоса частот, в которой происходит дифракция Брэгга, может быть расширена более чем в 10 раз по сравнению с полосой при изотропной дифракции Брэгга. Подобная геометрия взаимодействия широко используется при создании акустооптических deflectоров (см. гл. 8).

Если падающая волна является необыкновенной, а дифрагированная — обыкновенной, то  $n_i = N_e$ , а  $n_d = N_o$ . Векторная диаграмма для этого случая изображена на рис. 3.4, г. Из нее следует, что графики  $\theta_i(f)$  и  $\theta_d(f)$  меняются местами. В этом случае  $\theta_i$  изменяется от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  и проходит через нуль в точке  $f^*$ , а  $\theta_d$  остается всегда положительным и имеет минимум в точке  $f^*$ . При стоксовом рассеянии описанные выше закономерности сохраняются, но  $\theta_i$  и  $\theta_d$  меняют знак.

**2.** Рассмотрим теперь случай, когда акустическая волна распространяется перпендикулярно оптической оси кристалла, а плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_d$  и  $\vec{K}$  (плоскость взаимодействия) образует с оптической осью угол  $\alpha$ . Сечения поверхностей показателей преломления представляют собой окружность для обыкновенного луча и эллипс для необыкновенного (рис. 3.6, а). Длина полуосей эллипса равна  $2\pi N_e/\lambda$  и  $2\pi n_\alpha/\lambda$ , где

$$n_\alpha = N_o N_e (N_o^2 \sin^2 \alpha + N_e^2 \cos^2 \alpha)^{-1/2}.$$

Кривые зависимостей углов падения и дифракции от частоты ультразвука для этого случая показаны на рис. 3.6, б. Частоты  $f_{\min}$ ,  $f_1$ ,  $f^*$  и  $f_{\max}$  опреде-

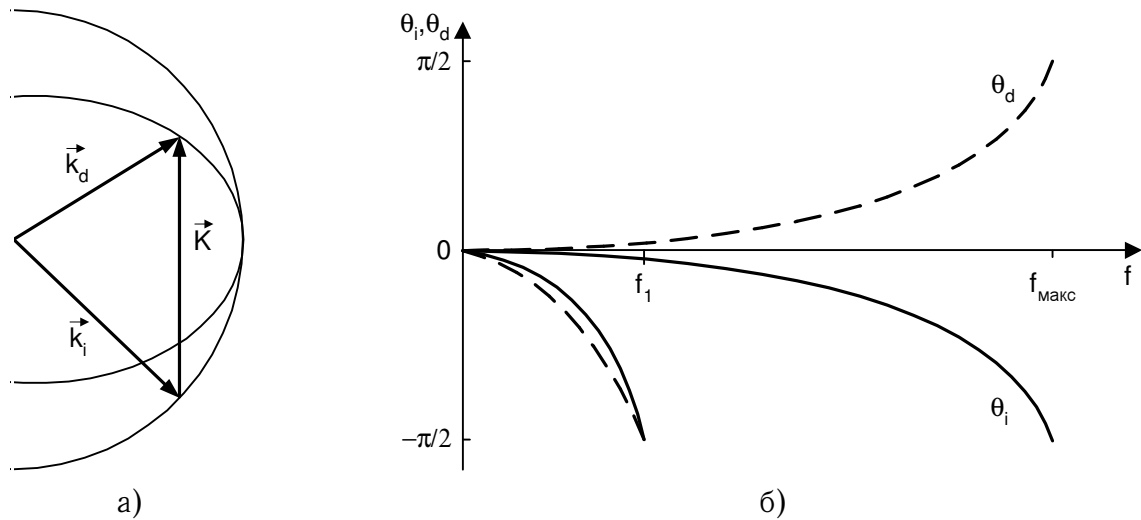


Рис. 3.7. Плоскость взаимодействия параллельна оптической оси:  
а — векторная диаграмма; б — зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$

ляются выражениями

$$\begin{aligned} f_{\min} &= v n_{\alpha} (N_o^2 - N_e^2) (2 N_o N_e \lambda)^{-1} \sin 2\alpha; \\ f_1 &= v (N_o - N_e) / \lambda; \\ f^* &= v \sqrt{N_o^2 - n_{\alpha}^2} / \lambda; \\ f_{\max} &= v (N_o + N_e) / \lambda. \end{aligned}$$

Частоты  $f_1$  и  $f_{\max}$ , соответствующие коллинеарному взаимодействию света и звука, не зависят от угла  $\alpha$ . Частоты же  $f_{\min}$  и  $f^*$  изменяются с изменением  $\alpha$ . При этом происходит деформация кривых  $\theta_i(f)$  и  $\theta_d(f)$ . Пунктирные кривые на рис. 3.6, б показывают, как перемещаются минимум и точка перегиба кривой  $\theta_i(f)$ . В диапазоне частот от  $f_{\min}$  до  $f_1$  дифракция существует при двух различных углах падения  $\theta_i$ , но эта двужначность наблюдается только при  $\alpha < \alpha_0$ . Угол  $\alpha_0$  определяется выражением  $\sin \alpha_0 = \sqrt{N_e / (N_o + N_e)}$ . При  $\alpha = \alpha_0$  частота  $f_{\min}$  совпадает с  $f_1$ . Угол падения, соответствующий минимальной частоте дифракции Брэгга  $\theta_1$  определяется равенством  $\sin \theta_1 = -n_{\alpha} N_e^{-1} \tan \alpha$ , а максимальный угол падения, при котором еще наблюдается дифракция, равен  $\sin \theta_{\max} = \lambda f^* / v n_{\alpha} = \sqrt{N_o^2 - n_{\alpha}^2} / n_{\alpha}$ . При  $\alpha = 0$  каждая из кривых  $\theta_i(f)$  и  $\theta_d(f)$  состоит из двух ветвей, выходящих из начала координат (рис. 3.7), а при  $\alpha = 90^\circ$  они совпадают с кривыми рис. 3.5. Вследствие симметрии всех рассмотренных выше векторных диаграмм относительно угла  $\theta = 0$  учет стоксового рассеяния приводит к появлению на графиках зависимости  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$  еще такого же количества кривых, которое изображено на рис. 3.5, 3.6, 3.7 соответственно, но отличающихся знаком  $\theta_i$  и  $\theta_d$ . Рассмотрим теперь случай, когда такой симметрии нет.

**3.** Пусть плоскость взаимодействия света с ультразвуком параллельна оптической оси кристалла, а фронт акустической волны образует с оптической осью угол  $\beta$ . Зависимости углов падения и дифракции от частоты ультразвука приведены на рис. 3.8. Поскольку условия для стоксового и антисток-

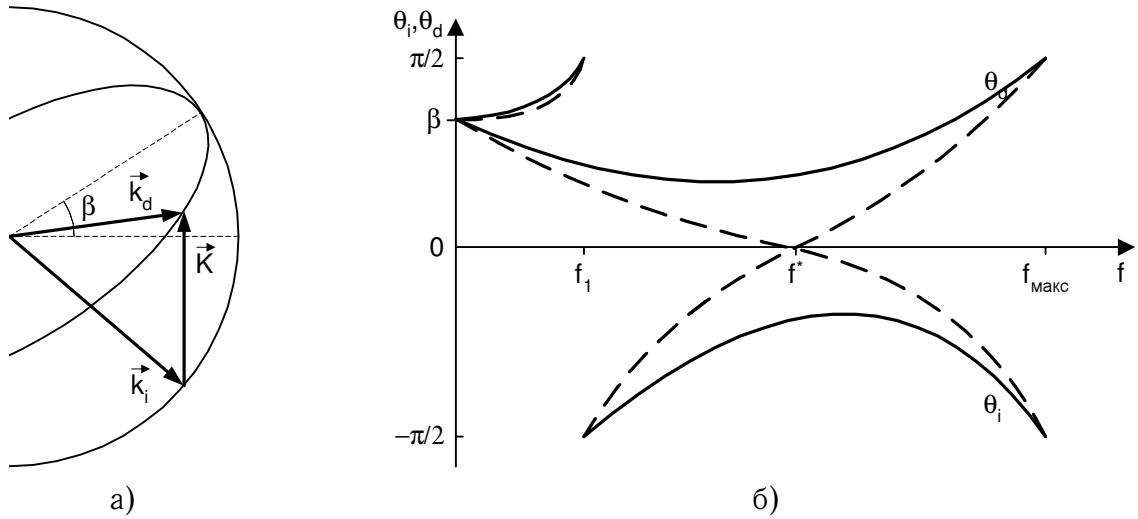


Рис. 3.8. Плоскость взаимодействия параллельна оптической оси:  
а — векторная диаграмма; б — зависимость  $\theta_i$  (сплошная кривая) и  $\theta_d$  (пунктир) от  $f$

сового рассеяния в этом случае существенно различны, на рис. 3.8 приведены обе кривые. Показатель преломления для дифрагированного луча имеет вид  $n_d \approx N_o + (N_e - N_o) \sin^2(\theta_d - \beta)$ .

Из векторной диаграммы рис. 3.8, а видно, что условия коллинеарного взаимодействия для стоксового и антистоксового взаимодействия выполняются при одной и той же частоте  $f_1 \approx (N_o - N_e) v \lambda^{-1} \cos \beta$ . Угол дифракции обращается в нуль на частоте  $f^* = v \lambda^{-1} [2N_o(N_o - N_e)]^{1/2} \sin \beta$ . В то же время экстремумы углов падения для стоксовой и антистоксовой компонент дифракции равны между собой, но достигаются на различных частотах  $f$ . При изменении  $\beta$  точки  $f_1$  и  $f^*$  перемещаются по оси частот, что дает возможность осуществить различную удобную для тех или иных акустооптических устройств геометрию взаимодействия.

Еще большее разнообразие геометрий акустооптического взаимодействия, соответствующего точному выполнению условий Брэгга, можно получить, используя двусные анизотропные среды [59]. Основные особенности брэгговского рассеяния света в таких кристаллах связаны с видом зависимости показателей преломления от направления распространения света. Эта зависимость имеет вид двуполосной самопересекающейся поверхности, точками самопересечения которой являются оси. Если  $N_1 < N_2 < N_3$ , то оптические оси лежат в плоскости  $xz$  под углом  $V$  к оси  $z$ . При этом угол  $V$  определяется соотношением (1.2.16).

Выражение для показателей преломления света, распространяющегося в произвольном направлении, удобнее всего записывается через углы  $\theta_1$  и  $\theta_{-1}$ , которые образуют направления вектора  $\vec{k}$  с оптическими осями среды, т. е.

$$\cos \theta_1 = \frac{k_x}{|\vec{k}|} \sin V + \frac{k_z}{|\vec{k}|} \cos V; \quad \cos \theta_{-1} = -\frac{k_x}{|\vec{k}|} \sin V + \frac{k_z}{|\vec{k}|} \cos V.$$

С помощью углов  $\theta_1$  и  $\theta_{-1}$  показатели преломления произвольной двусной



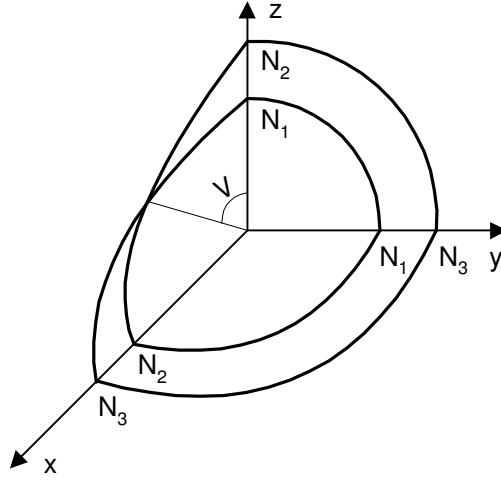


Рис. 3.9. Сечение поверхности показателей преломления двуосного кристалла координатными плоскостями

среды могут быть записаны в виде (1.2.21).

Сечение поверхности показателей преломления координатными плоскостями приведено на рис. 3.9. Если плоскость рассеяния совпадает с одной из главных диэлектрических плоскостей кристалла, то сечение поверхности показателей преломления имеет вид окружности, заключенной в эллипсе (плоскость рассеяния  $yz$ ), эллипса, заключенного в окружность (плоскость  $xy$ ) и пересекающихся эллипса и окружности (плоскость рассеяния  $xz$ ) (см. рис. 3.10, а, б, в). Зависимости углов падения и дифракции от частоты для дифракции света на акустической волне, распространяющейся вдоль одной из главных диэлектрических осей кристалла, соответствующие рис. 3.10, а и 3.10, б, подобны изображенным на рис. 3.5 и 3.6. Дифракция Брэгга в плоскости  $xz$  не имеет аналогии в одноосных кристаллах. Соответствующие зависимости углов падения и дифракции для этого случая изображены на рис. 3.10, г.

Выпишем в явном виде зависимости углов падения и дифракции от частоты ультразвука для геометрии взаимодействия, изображенной на рис. 3.10, в. Показатель преломления для падающего луча в данном случае не зависит от угла падения и равен  $N_2$ . Для дифрагированного луча углы между  $\vec{k}_d$  и оптическими осями кристалла равны  $\theta_1 = \pi/2 - V - \theta_d$ ;  $\theta_{-1} = \pi/2 + V - \theta_d$ . Подставляя эти значения в (1.2.21), получим выражение для показателя преломления дифрагированной волны

$$n_d^{-2} = N_3^{-2} + (N_1^{-2} - N_3^{-2}) \sin^2 \theta_d. \quad (3.3.4)$$

Отсюда

$$n_d \approx N_3 \left( 1 - \frac{N_3^2 - N_1^2}{2N_1^2} \sin^2 \theta_d \right). \quad (3.3.5)$$

Подставляя это выражение в (3.3.3), получим явную зависимость углов ди-

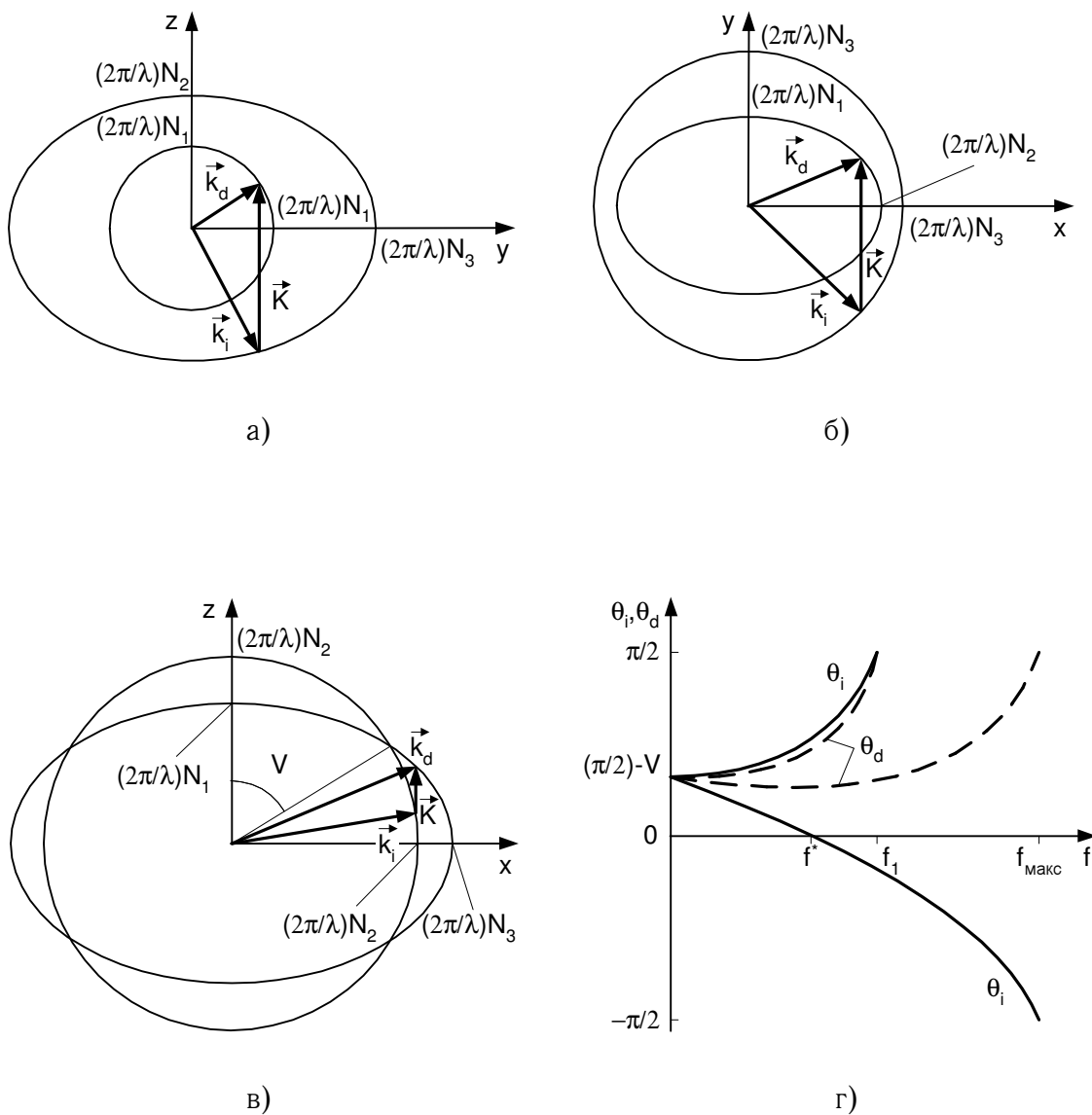


Рис. 3.10. Дифракция света в двуосных кристаллах:  
а — векторная диаграмма в плоскости  $yz$ ; б — векторная диаграмма в плоскости  $xy$ ; в — векторная диаграмма в плоскости  $xz$ ;  
г — зависимость  $\theta_i$  (сплошная кривая) и  $\theta_d$  (пунктир) от  $f$  в плоскости  $xz$

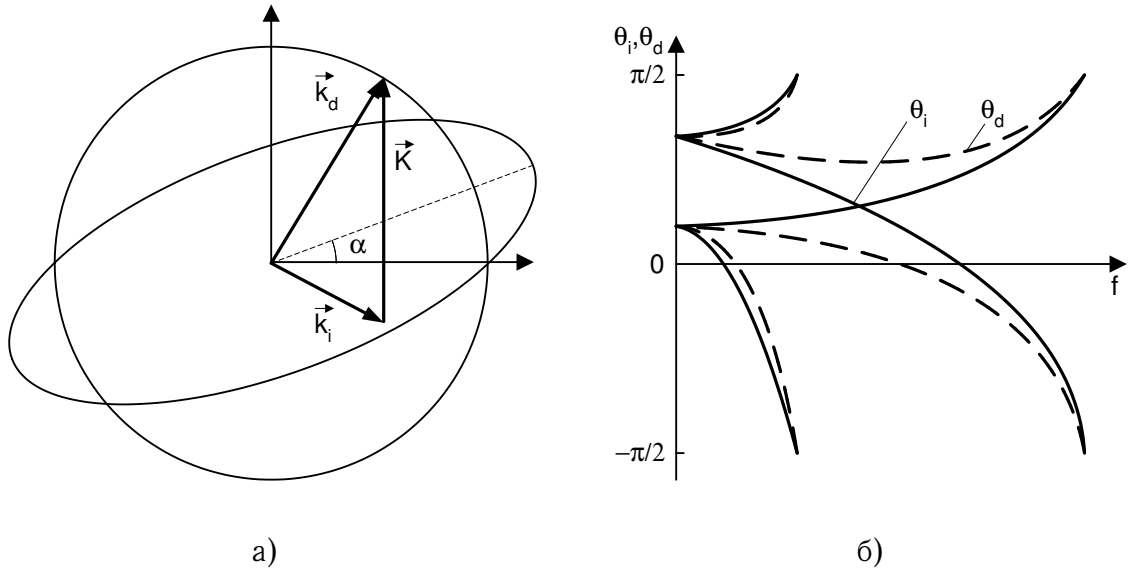


Рис. 3.11. Неаксиальная геометрия акустооптического взаимодействия в двуосном кристалле

фракции и падения от приведенной частоты  $F = \lambda f/v$ :

$$\sin \theta_d = [N_3 (N_3^2 + N_2^2 - F^2) (N_3^2 - N_1^2)]^{-1} \left[ -2FN_1^2 N_3^2 \pm \sqrt{4F^2 N_1^4 N_3^4 + 2N_3^2 (N_3^2 + N_2^2 - F^2) (N_3^2 - N_1^2) N_1^2 (N_3^2 - N_2^2 + N_3 F)} \right];$$

$$\sin \theta_i = \left[ N_3^2 \left( 1 + \frac{N_3^2 - N_1^2}{N_1^2} \sin^2 \theta_d \right)^{-1} - F^2 - N_2^2 \right] (2FN_2)^{-1}.$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для других случаев дифракции света в главных плоскостях двуосного кристалла. Однако вследствие громоздкости они здесь не выписаны. Заметим лишь, что при распространении звука под углом к главным диэлектрическим осям кристалла нарушается симметрия картины относительно угла  $\theta = 0$ , что делает необходимым увеличивать в два раза число кривых на зависимостях  $\theta_i(f)$  и  $\theta_d(f)$ , подобно тому, как это было сделано на [рис. 3.8, б](#).

При повороте вектора  $\vec{K}$  относительно оси  $z$  кривые  $\theta_i(f)$  и  $\theta_d(f)$  существенно изменяются. Характерные для этого случая зависимости  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от частоты звука приведены на [рис. 3.11](#). Еще более сложными являются рассматриваемые зависимости при произвольной ориентации плоскости дифракции относительно главных диэлектрических плоскостей кристалла. Сечения обеих поверхностей показателей преломления плоскостью дифракции являются в этом случае сложными кривыми и оба показателя  $n_i$  и  $n_d$  зависят от направлений распространения света. Таким образом, в анизотропных кристаллах можно осуществить самую разнообразную геометрию взаимодействия света с акустической волной, необходимую для тех или иных практических применений акустооптики.

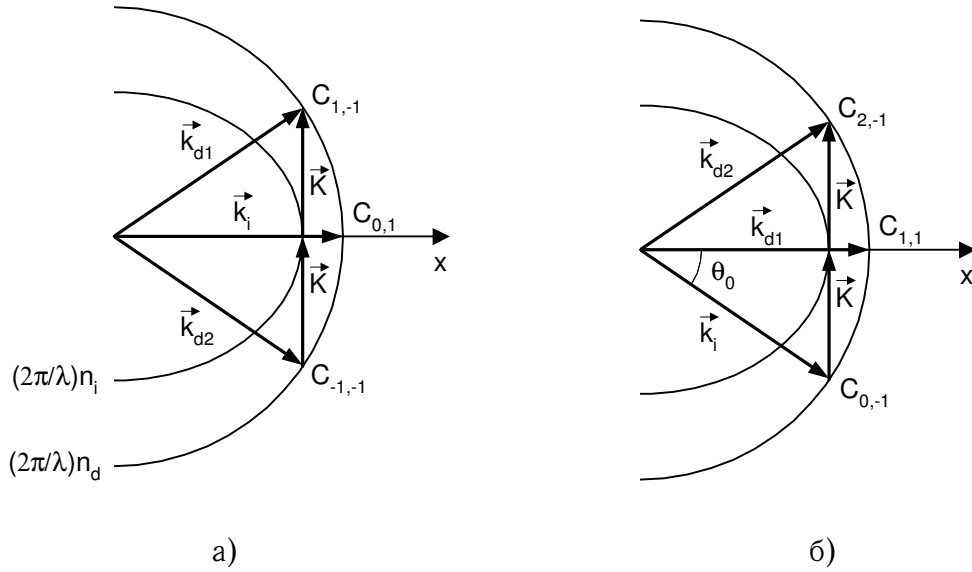


Рис. 3.12. Векторные диаграммы двукратного брэгговского рассеяния:  
а — рассеяние в +1 и -1 максимумах; б — рассеяние в 1 и 2 максимумах

### 3.4 Многократное брэгговское рассеяние в анизотропных средах

Анизотропные среды характеризуются двуполосной поверхностью показателей преломления. Это обстоятельство приводит к тому, что при определенных условиях (заданных частотах и углах падения света на ультразвуковую волну) может наблюдаться многократное брэгговское рассеяние света [67]. Главная особенность рассматриваемого явления заключается в том, что законы сохранения энергии и импульса выполняются для двух или даже трех дифракционных максимумов одновременно. Это означает, что при дифракции света возникают два или даже три дифракционных максимума, помимо нулевого, каждый из которых является брэгговским. Многие особенности анизотропного брэгговского рассеяния света с несколькими максимумами могут быть качественно определены из векторных диаграмм. На рис. 3.12 представлены векторные диаграммы анизотропного рассеяния света в два дифракционных максимума для случая, когда акустическая волна распространяется перпендикулярно оптической оси одноосного отрицательного кристалла, а плоскость рассеяния составляет угол  $\alpha$  с оптической осью. (Ясно, что подобная геометрия рассеяния возможна и в других кристаллах).

Особенностью рассеяния, показанного на векторной диаграмме рис.3.12, а, является одновременное осуществление стоксового и антистоксового процессов, что сопровождается отклонением света в два дифракционных максимума, расположенных симметрично относительно нулевого. Дифракция наблюдается при частоте ультразвука  $f^*$ , равной

$$f^* = v \sqrt{n_d^2 - n_i^2} / \lambda, \quad (3.4.1)$$

и при угле падения  $\theta_i = 0$ . Поляризация падающего света является необыкновенной, а поляризации обоих дифракционных максимумов — обыкновенные.

Расчет интенсивности света в дифракционных порядках может быть проведен с использованием системы уравнений (3.1.10), в которых следует оставить лишь максимумы  $C_{01}$ ,  $C_{1,-1}$  и  $C_{-1,-1}$ . При точном выполнении условия (3.4.1) и малых углах дифракции взаимодействие описывается системой трех уравнений

$$\frac{dC_{01}}{dx} = -\frac{q}{2}(C_{1,-1} + C_{-1,-1}); \quad \frac{dC_{1,-1}}{dx} = \frac{q}{2}C_{01}; \quad \frac{dC_{-1,-1}}{dx} = \frac{q}{2}C_{01}. \quad (3.4.2)$$

Система уравнений (3.4.2) легко интегрируется с учетом граничного условия  $C_{01}(0) = 1$ ,  $C_{1,-1}(0) = C_{-1,-1}(0) = 0$  и дает

$$C_{01} = \cos\left(ql/\sqrt{2}\right); \quad C_{1,-1} = -C_{-1,-1} = -2^{-1/2} \sin\left(ql/\sqrt{2}\right). \quad (3.4.3)$$

Из (3.4.3) следует, что интенсивности света в  $\pm 1$ -ых максимумах равны при любой мощности акустической волны. В каждый из максимумов можно отклонить до 50% падающего света. Полная перекачка света из нулевого максимума в боковые происходит при  $ql = \pi/\sqrt{2}$ , т. е. при акустической мощности, которая в два раза ниже мощности, необходимой для полной перекачки света при однократном рассеянии ( $ql = \pi$ ).

При частоте акустической волны, несколько отличающейся от  $f^*$ , но близкой к ней, акустооптическая ячейка, описываемая векторной диаграммой рис. 3.12, а, может служить датчиком направления падающей световой волны. При небольшом изменении угла падения света интенсивность света в одном из боковых максимумов растет (там, где соответствующее  $\eta$  уменьшается), а в другом падает.

Если падающая световая волна поляризована как обыкновенная, а угол падения  $\theta_i = \theta_0$ , то на частоте звука  $f^*$  может произойти последовательное рассеяние света сначала в первый, а затем во второй дифракционные максимумы (рис. 3.12, б). При каждом рассеянии плоскость поляризации дифрагированного света поворачивается на  $90^\circ$ , поэтому плоскость поляризации во втором максимуме совпадает с исходной.

При строгом выполнении условия Брэгга из (3.1.10) вытекают следующие уравнения, связывающие амплитуды дифракционных максимумов:

$$\frac{dC_{0,-1}}{dx} = -\frac{q}{2}C_{11}; \quad \frac{dC_{11}}{dx} = \frac{q}{2}(C_{0,-1} - C_{2,-1}); \quad \frac{dC_{2,-1}}{dx} = \frac{q}{2}C_{11}. \quad (3.4.4)$$

Параметр  $q$  в этих уравнениях можно считать одинаковым для первичного и вторичного рассеяния, если  $\cos\theta_0 \approx 1$ . Учитывая граничные условия  $C_{0,-1}(0) = 1$ ,  $C_{11}(0) = C_{2,-1}(0) = 0$ , получаем решение системы уравнений (3.4.4) в виде

$$C_{0,-1} = \cos^2 \frac{ql}{2\sqrt{2}}; \quad C_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin ql; \quad C_{2,-1} = \sin^2 \frac{ql}{2\sqrt{2}}. \quad (3.4.5)$$

На рис. 3.13 сплошными кривыми представлены зависимости относительных интенсивностей дифрагированного света в первом  $I_1/I_i$  и втором  $I_2/I_i$  дифракционных максимумах от произведения  $ql$ . В соответствии с (3.4.5) на частоте  $f^*$

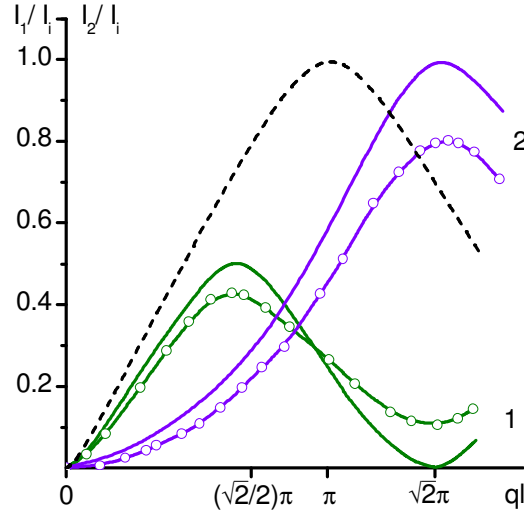


Рис. 3.13. Зависимости  $I_1/I_i$  и  $I_2/I_i$  от  $ql$  для двукратного брэгговского рассеяния:

Сплошные кривые — теория, точки — эксперимент.

1 —  $I_1/I_i$ ; 2 —  $I_2/I_i$

в первый дифракционный максимум не может быть отклонено более половины падающего света. Максимум интенсивности  $I_1$  достигается при  $ql = \pi/\sqrt{2}$ , т. е. при акустической мощности, в два раза меньшей, чем необходимо для полного однократного рассеяния. Для сравнения на рис. 3.13 приведена пунктирная кривая, соответствующая однократному анизотропному рассеянию. При  $ql = \sqrt{2}\pi$  вся световая энергия перекачивается во второй дифракционный максимум. Однако при этом потребляемая акустическая мощность в два раза выше, чем при однократном рассеянии.

Частота световой волны во втором дифракционном максимуме оказывается сдвинутой по сравнению с нулевым на величину  $2f^*$ . Поэтому схема двукратного рассеяния может быть использована в устройствах сдвига частоты света. Предлагалось также использовать этот эффект в акустооптических анизотропных анализаторах спектра [68], однако принципиальная нелинейность двукратного рассеяния создает существенные затруднения при анализе немонохроматических сигналов.

Для оценки возможности применения двукратного брэгговского рассеяния в акустооптических устройствах необходимо рассчитать эффективности дифракции в первом и втором дифракционных порядках в зависимости от амплитуды и частоты упругой волны. Для взаимодействия, представленного на рис. 3.12, б, система уравнений (3.1.10) при  $f \approx f^*$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dC_{0,-1}}{dx} &= -\frac{q}{2} C_{11} \exp(-j\eta_0 x); \\ \frac{dC_{2,-1}}{dx} &= \frac{q}{2} C_{11} \exp(j\eta_1 x); \\ \frac{dC_{11}}{dx} &= \frac{q}{2} [C_{0,-1} \exp(j\eta_0 x) - C_{2,-1} \exp(-j\eta_1 x)], \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

где  $\eta_0 = k_{0,-1x} - k_{11x}$ ;  $\eta_1 = k_{11x} - k_{2,-1x}$ . Коэффициент  $\eta_0$  характеризует селек-

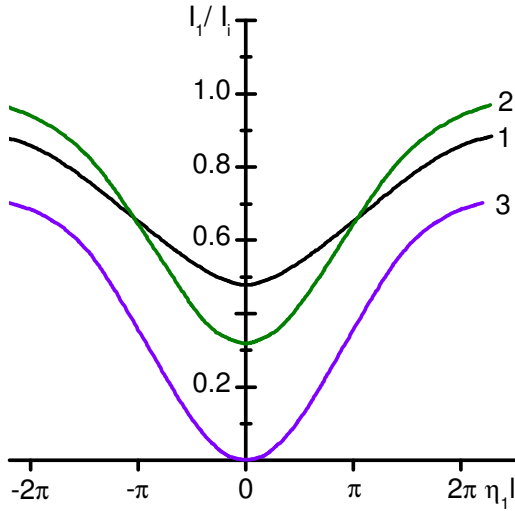


Рис. 3.14. Зависимость  $I_1/I_i$  от расстройки  $\eta_1 l$  при различных  $ql$ :  
 1 —  $ql = 0,8$ ; 2 —  $ql = \pi$ ;  
 3 —  $ql = \sqrt{2}\pi$

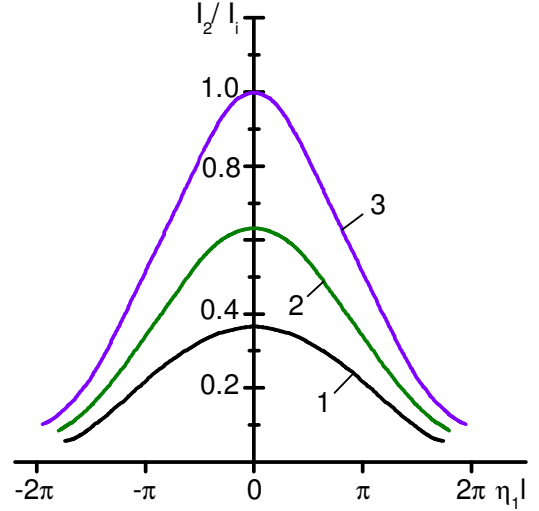


Рис. 3.15. Зависимость  $I_2/I_i$  от расстройки  $\eta_1 l$  при различных  $ql$ :  
 1 —  $ql = 0,8$ ; 2 —  $ql = \pi$ ;  
 3 —  $ql = \sqrt{2}\pi$

тивность брэгговского рассеяния из нулевого максимума в первый, а  $\eta_1$  — из первого во второй. При  $f = f^*$  коэффициенты  $\eta_0$  и  $\eta_1$  равны нулю. При  $f \approx f^*$  они могут быть разложены в ряд по  $\Delta f = f - f^*$ . Проводя такое разложение и ограничиваясь членами ряда, квадратичными по  $\Delta f$ , получим

$$\eta_0 = -\frac{\pi\lambda}{n_d v^2} (\Delta f)^2; \quad \eta_1 \approx -\frac{4\pi\lambda}{n_i v^2} f^* \Delta f - \frac{7\pi\lambda}{n_i v^2} (\Delta f)^2. \quad (3.4.7)$$

Сравнение равенств (3.4.7) показывает, что селективность по частоте анизотропного рассеяния из нулевого максимума в первый значительно меньше селективности вторичного рассеяния. Это связано с тем, что первичное рассеяние в данном случае соответствует рассеянию с экстремальным углом падения, о слабой селективности которого по частоте говорилось в § 3.3. Если  $\Delta f \ll f^*$ , то квадратичными членами в (3.4.7) вообще можно пренебречь. На рис. 3.14 и 3.15 приведены рассчитанные в этом приближении с помощью уравнений (3.4.6) зависимости  $I_1/I_i$  и  $I_2/I_i$  от  $\eta_1 l$ .

Особенностью дифракции в первый дифракционный максимум является уменьшение интенсивности  $I_1$  при приближении частоты ультразвука  $f$  к  $f^*$ . Это объясняется тем, что при достаточно больших расстройках  $\eta_1 l > \pi$  процессы вторичного рассеяния света практически отсутствуют и интенсивность  $I_1$  определяется амплитудой звуковой волны в соответствии с пунктирной кривой рис. 3.13. Уменьшение интенсивности в центре диапазона частот объясняется вторичным рассеянием света, происходящим при малых  $\eta_1 l$ . Минимум интенсивности  $I_1$  наблюдается при  $f = f^*$  и может быть найден из рис. 3.13. Глубина провала на частоте  $f^*$  равна разности ординат пунктирной кривой и кривой  $I_1/I_i$  на рис. 3.13 при заданном  $ql$ . Если в акустооптическом устройстве используется первый дифракционный максимум при геометрии взаимодействия, изображенный на рис. 3.12, б, то оптимальной мощностью ультразвуковой волны

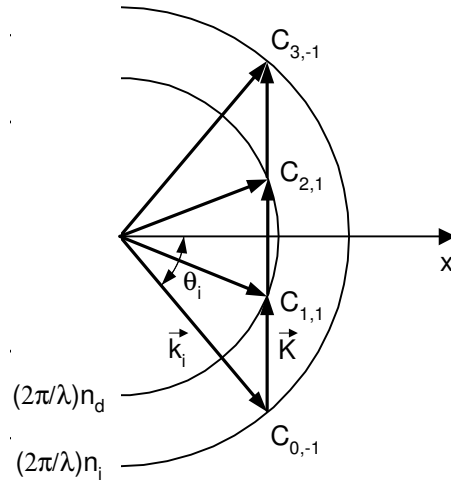


Рис. 3.16. Векторная диаграмма трехкратного брэгговского рассеяния

можно считать величину, соответствующую  $ql = 0,8\pi$ . При этом максимальное значение интенсивности света в первом максимуме составляет 0,9 от падающей, а провал интенсивности при  $f = f^*$  не превышает 3 дБ. Увеличение акустической мощности сверх оптимальной ухудшает частотную характеристику. При  $ql < 0,8\pi$  частотная характеристика оказывается более равномерной, но снижается эффективность дифракции во всем диапазоне перестройки частоты.

На рис. 3.15 изображена зависимость интенсивности света во втором дифракционном порядке от  $\eta_1 l$ . Максимум интенсивности  $I_2/I_i$  наблюдается при  $f = f^*$  и определяется величиной акустической мощности. Частотный диапазон практически не зависит от интенсивности ультразвука. Предел изменения частоты по уровню ослабления интенсивности на 3 дБ соответствует точкам  $|\eta_1 l| = \pi$ . Расчет показывает, что полоса частот акустической волны при двукратном брэгговском рассеянии в 3,2 раза меньше, чем при изотропной дифракции, однако надо учитывать, что при двукратной дифракции угол отклонения светового луча в два раза больше, чем при однократной дифракции при одном и том же изменении частоты.

При дифракции в анизотропной среде возможно отклонение света и в три дифракционных максимума помимо нулевого, причем, закону сохранения импульса одновременно удовлетворяет каждый из процессов рассеяния. Векторная диаграмма рассеяния света в три дифракционных максимума, когда последовательно происходит анизотропная, изотропная и вновь анизотропная дифракция, показана на рис. 3.16. Из векторной диаграммы следует, что поляризация света в первом и втором максимумах повернута на  $90^\circ$  по отношению к падающей, а в третьем максимуме совпадает с исходной. Кроме того, частота дифрагированного света в первом, втором и третьем максимумах оказывается соответственно сдвинутой на величины  $f$ ,  $2f$  и  $3f$  по отношению к частоте падающего света. Полагая, что показатели преломления  $n_i$  и  $n_d$  меняются мало, можно определить частоту ультразвука  $f_3 = v\sqrt{2(n_i^2 - n_d^2)}/2\lambda$  и угол падения света  $\sin \theta_i = 3\sqrt{(n_i^2 - n_d^2)}/2/2n_i$ , при которых происходит трехкратное рассеяние.

Система дифракционных уравнений, описывающая трехкратное рассеяние в



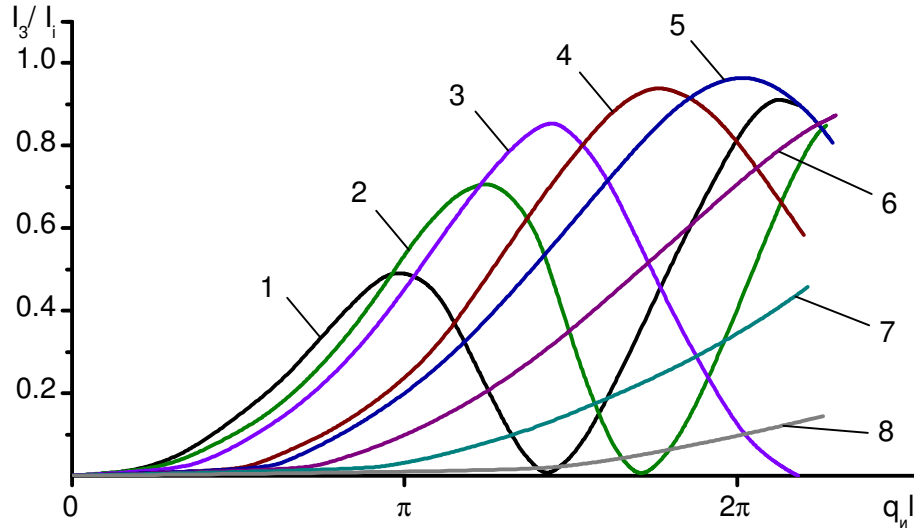


Рис. 3.17. Зависимость  $I_3/I_1$  от  $q_u l$ :

- 1 —  $q_a/q_u = 2,0$ ;    2 —  $q_a/q_u = 1,7$ ;    3 —  $q_a/q_u = 1,3$ ;    4 —  $q_a/q_u = 1,0$ ;  
 5 —  $q_a/q_u = 0,9$ ;    6 —  $q_a/q_u = 0,7$ ;    7 —  $q_a/q_u = 0,5$ ;    8 —  $q_a/q_u = 0,3$ ;

случае строгого выполнения условия Брэгга при  $\theta_i \ll 1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{0,-1}}{dx} &= -\frac{q_a}{2} C_{11}; & \frac{dC_{11}}{dx} &= \frac{q_a}{2} C_{0,-1} - \frac{q_u}{2} C_{21}; \\ \frac{dC_{21}}{dx} &= \frac{q_u}{2} C_{11} - \frac{q_a}{2} C_{3,-1}; & \frac{dC_{3,-1}}{dx} &= \frac{q_a}{2} C_{21}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Здесь  $C_{0,-1}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{3,-1}$  — относительные амплитуды световых максимумов;  $q_u$ ,  $q_a$  — параметры, характеризующие эффективность изотропного и анизотропного рассеяния.

В общем случае  $q_a \neq q_u$  даже при малых углах рассеяния, так как изотропную и анизотропную дифракцию обеспечивают, как правило, различные фотоупругие константы. Очевидно, что эффективность рассеяния в третий максимум будет существенно зависеть от соотношения  $q_a$  и  $q_u$ , поэтому система уравнений (3.4.8) была решена [69] при нескольких значениях параметра  $\zeta = q_a/q_u$ . На рис. 3.17 показаны рассчитанные зависимости интенсивности света в третьем максимуме от амплитуды звуковой волны  $q_u l$  для нескольких значений  $\zeta$ . При управляющей акустической мощности  $q_u l \leq 2\pi$  может происходить практически полная перекачка света из нулевого максимума в третий. В случае  $\zeta \approx 0,9$ , являющемся оптимальным с точки зрения величины управляющего сигнала, полное отклонение света в третий максимум обеспечивает акустическая мощность, соответствующая  $q_u l = 2\pi$ . Если  $q_u$  и  $q_a$  различаются больше, чем на 10%, то проигрыш в мощности ультразвука возрастает. На рис. 3.18 представлены интенсивности дифрагированного света во всех трех дифракционных максимумах в зависимости от  $q_u l$  при  $\zeta = 0,9$ .

Выявить поведение дифракционных максимумов на частотах, близких к  $f_3$ ,

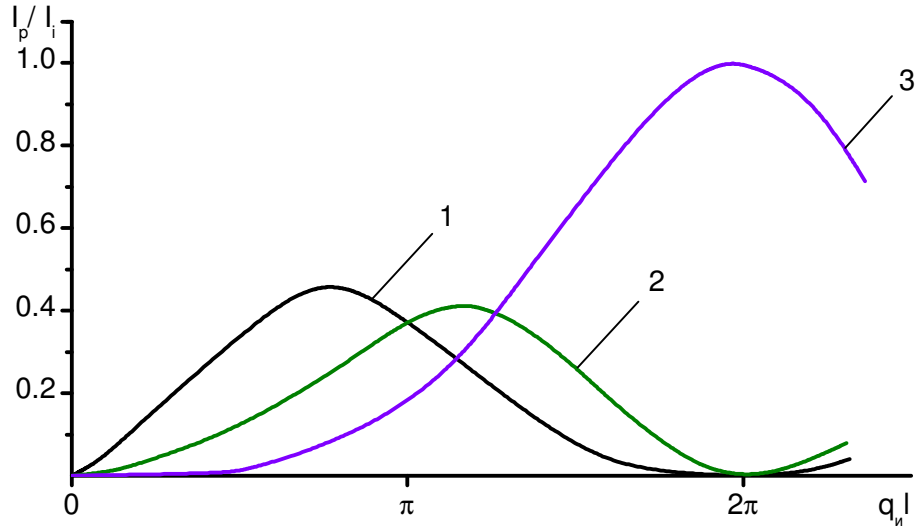


Рис. 3.18. Зависимость  $I_p/I_i$  от  $q_u l$  при  $q_a/q_u = 0,9$ :  
1 —  $I_1/I_i$ ; 2 —  $I_2/I_i$ ; 3 —  $I_3/I_i$

можно, решая систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{0,-1}}{dx} &= -\frac{q_a}{2} C_{11} \exp(-j\eta_0 x); \\
 \frac{dC_{11}}{dx} &= \frac{q_a}{2} C_{0,-1} \exp(j\eta_0 x) - \frac{q_u}{2} C_{21} \exp(-j\eta_1 x); \\
 \frac{dC_{21}}{dx} &= \frac{q_u}{2} C_{11} \exp(j\eta_1 x) - \frac{q_a}{2} C_{3,-1} \exp(-j\eta_2 x); \\
 \frac{dC_{3,-1}}{dx} &= \frac{q_a}{2} C_{21} \exp(j\eta_2 x),
 \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

где  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — коэффициенты, определяющие селективность рассеяния соответственно в первый, второй и третий дифракционные максимумы. Оценка показала, что  $\eta_p$  в первом приближении по  $\Delta f$  равны  $\eta_0 = \pi \lambda f_3 \Delta f / n_i v^2$ ;  $\eta_1 \approx 3\eta_0$ ;  $\eta_2 \approx 7\eta_0$ .

Величина  $\eta_0$  оказалась такой же, как при изотропной дифракции. Решение системы уравнений (3.4.9) при  $\zeta = 0,9$  показало, что при  $q_u l = 0,8\pi$  интенсивность света  $I_1/I_i$  достигает значения 0,45 и почти не меняется при больших перестройках частоты ультразвука  $|\eta_0 l| \leq \pi$ . Частотный провал во втором дифракционном максимуме зависит от  $q_u l$  и при  $q_u l \leq 1,4\pi$  не превышает 3 дБ. Наконец, для третьего дифракционного максимума ширина диапазона изменения акустической частоты не зависит от мощности и равна  $\eta_0 l = 0,28\pi$ , что в 5,5 раза меньше, чем при изотропной дифракции Брэгга. Однако угол отклонения света при трехкратном рассеянии в три раза больше, чем при однократном для одинакового изменения частоты ультразвука.

Экспериментальное исследование многократного брэгговского рассеяния света в анизотропной среде проводилось на кристалле парателлурита  $\text{TeO}_2$  [69]. Высокое акустооптическое качество материала позволило реализовать эффективное двукратное, а также трехкратное рассеяние света при не слишком больших акустических мощностях. На рис. 3.13 приведены полученные экспери-

ментально зависимости интенсивностей дифрагированного света от акустической мощности в первом и втором дифракционных максимумах при двукратном рассеянии. Максимальная интенсивность света в первом максимуме оказалась равной 0,45, а во втором — 0,8 от интенсивности падающего света. Хорошо подтверждается также предсказанное теорией соотношение акустических мощностей, при которых достигается максимум эффективности рассеяния в первый и второй дифракционные порядки. Поляризация света во втором максимуме, как и следовало ожидать, совпадала с исходной и отличалась от поляризации света в первом дифракционном порядке. Частотные зависимости интенсивности дифрагированного света при различных величинах акустической мощности с точностью до 10% совпали с теоретическими.

При исследовании трехкратного рассеяния света на ультразвуке в кристалле парателлурита также получено качественное согласие теории и эксперимента. Соотношение коэффициентов  $q_a$  и  $q_u$  для парателлурита равно двум. Количественное согласие теории и эксперимента при трехкратном рассеянии оказалось худшим, чем при двукратном рассеянии, так как при частоте акустической волны порядка 30 МГц, когда наблюдалось это рассеяние, режим изотропной дифракции не являлся вполне брэгговским. Появление дополнительных максимумов изотропной дифракции влияло на соотношение эффективностей различных брэгговских порядков.

Может сложиться впечатление, что появление двукратной и трехкратной брэгговской дифракции при заданном направлении падающего света и заданном направлении акустической волны, происходит только в отдельных исключительных случаях, однако это не так. Прямая, параллельная волновому вектору звука и проходящая через конец волнового вектора падающего света, в анизотропной среде пересекает поверхность показателей преломления еще в трех точках. Это означает, что при использовании упругого колебания, содержащего три соответственно подобранных частоты, как правило, можно осуществить трехкратное брэгговское рассеяние света в одной плоскости.

### **3.5 Изотропная дифракция в анизотропной среде и особенности дифракции света в изотропном твердом теле**

В анизотропной среде изотропная дифракция может происходить несколько иначе, чем это описано в [главе 2](#). Дело в том, что при сохранении индекса поляризации показатель преломления в анизотропной среде не зависит от направления распространения света только для обыкновенной волны. Условия дифракции этой волны совпадают с условиями дифракции в изотропной среде. Для необыкновенной волны в анизотропной среде показатель преломления зависит от направления распространения света. В этом случае показатели преломления для падающей и дифрагированной волн оказываются различными даже при изотропной дифракции света. Для выполнения условий Брэгга углы падения и дифракции должны удовлетворять соотношениям (3.3.4). Углы  $\theta_i$  и  $\theta_d$  отличаются при этом друг от друга по величине. На [рис. 3.19](#) изображена

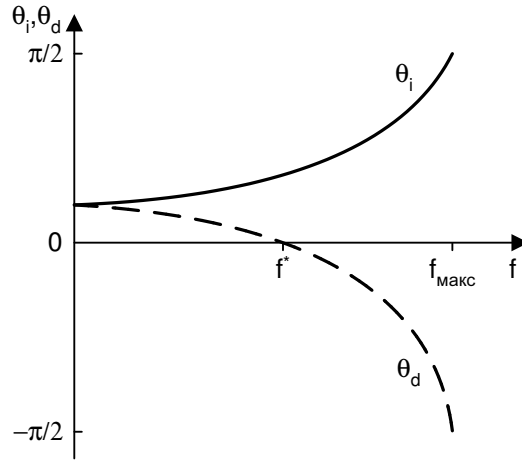


Рис. 3.19. Зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от  $f$  для изотропной дифракции в анизотропной среде

зависимость  $\theta_i$  и  $\theta_d$  от частоты звука. Более сложные зависимости наблюдаются вблизи оптических осей двуосных сред [59]. Однако качественных отличий изотропной дифракции в анизотропной среде от дифракции в изотропной среде нет, так как эллипс в сечении показателей преломления мало отличается от окружности, ибо  $n_{-1} - n_1 \ll n$  практически для всех сред в оптическом диапазоне. Кроме того, при изотропной дифракции  $n_d \rightarrow n_i$  при  $f \rightarrow 0$ , поэтому при изотропной дифракции отсутствуют все те особенности, которые характерны для анизотропной дифракции и появляются при достаточно малых акустических частотах.

Рассмотрим теперь некоторые особенности дифракции света в изотропных твердых телах, связанные с поляризацией падающей и дифрагированной волн и не описываемые скалярной теорией дифракции, приведенной в главе 2.

Как известно, упругое возмущение в изотропной среде может распространяться в форме продольной или поперечной волны. Рассмотрим эти два случая отдельно. Пусть в изотропной среде распространяется плоская продольная акустическая волна. Обозначим направление волнового вектора волны осью  $z$ . (В этом же направлении происходят и колебания частиц упругой среды.) Единственная не равная нулю компонента деформации  $\gamma_{33}$  определяет в соответствии с (3.1.2) компоненты тензора изменения диэлектрической проницаемости среды

$$\Delta\epsilon_{ij} = -n^4 p_{ij33} \gamma_{33}. \quad (3.5.1)$$

Поскольку для изотропного тела не равны нулю только три компонента тензора  $p_{ij33}$ , а именно  $p_{3333} = p_{11}$ ;  $p_{2233} = p_{1133} = p_{12}$ , то соответствующие изменения диэлектрической проницаемости имеют вид

$$\Delta\epsilon_{33} = -n^4 p_{11} \gamma_3; \quad \Delta\epsilon_{11} = \Delta\epsilon_{22} = -n^4 p_{12} \gamma_3. \quad (3.5.2)$$

В (3.5.2) использовано матричное представление тензоров  $\mathbf{p}$  и  $\gamma$ .

Все недиагональные элементы тензора  $\Delta\epsilon$  равны нулю. Это означает, что выбранные нами исходные оси являются главными осями оптической индикатрисы среды, деформированной в результате распространения звука. Главные

значения показателя преломления этой среды принимают вид

$$n_3 = \sqrt{n^2 + \Delta\epsilon_{33}}; \quad n_1 = n_2 = \sqrt{n^2 + \Delta\epsilon_{11}}.$$

Используя малость изменения диэлектрической проницаемости, получим изменения показателя преломления под действием продольной упругой волны

$$\Delta n_3 = -n^3 p_{11} \gamma_3 / 2; \quad \Delta n_1 = \Delta n_2 = -n^3 p_{12} \gamma_3 / 2. \quad (3.5.3)$$

Из (3.5.3) видно, что в результате распространения продольной упругой волны вдоль оси  $z$  изотропной среды, эта среда стала одноосной с оптической осью, направленной по  $z$ . Физически этот результат является очевидным, так как ось  $z$  — единственное избранное направление в исследуемой среде. Появление в среде малой оптической анизотропии, описываемой (3.5.3), приводит к тому, что эффективность дифракции света, поляризованного по оси  $z$  оказывается отличной от эффективности дифракции для света, поляризованного ортогонально  $z$ . Это отличие тем больше, чем больше разница  $p_{11}$  и  $p_{12}$  в среде. В обоих этих случаях направление поляризации света при дифракции сохраняется. Если световая волна поляризована под углом к оси  $z$ , то ее нужно разложить на две компоненты: поляризованную по  $z$  и перпендикулярно  $z$ . Каждая из этих компонент дифрагирует со своей эффективностью. В результате образуется дифрагированная волна с иным соотношением амплитуд компонент, поляризованных по  $z$  и ортогонально  $z$ . Определив соотношение этих компонент, можно найти поворот плоскости поляризации света при дифракции. Если, например, падающая волна поляризована под углом  $45^\circ$  к оси  $z$ , то

$$E_{i\parallel} = E_{i\perp} = E/\sqrt{2},$$

где  $E_{i\parallel}$  и  $E_{i\perp}$  — компоненты амплитуды падающей волны  $E$ , параллельная оси  $z$  и перпендикулярная  $z$ . При малой эффективности дифракции компоненты амплитуды дифрагированной волны в первом порядке дифракции будут равны

$$E_{d\parallel} = \frac{E}{2\sqrt{2}} \frac{kl}{\cos \theta_d} \frac{\Delta n_3}{n}; \quad E_{d\perp} = \frac{E}{2\sqrt{2}} \frac{kl}{\cos \theta_d} \frac{\Delta n_1}{n}.$$

Таким образом, дифрагированный свет оказывается поляризованным под углом  $\theta$  к оси  $z$ , где  $\operatorname{tg} \theta = p_{12}/p_{11}$ . При  $p_{11} > p_{12}$  поляризация дифрагированного света оказывается ближе к оси  $z$ , чем падающего, а при  $p_{11} < p_{12}$  — дальше от оси  $z$ . Если описываемое явление имеет характер дифракции Рамана-Ната с большим числом дифракционных максимумов, то каждый следующий максимум будет больше повернут к оси  $z$  при  $p_{11} > p_{12}$ , чем предыдущий. При большой эффективности дифракции угол поворота зависит от амплитуды звуковой волны.

Хотя в рассмотренном случае происходит поворот плоскости поляризации света при дифракции, это явление нельзя назвать анизотропной дифракцией света. По своей физической сути это изотропная дифракция для каждого из двух собственных направлений поляризации.

Рассмотрим теперь дифракцию света в изотропной среде, возмущенной поперечной упругой волной. Будем считать, что волновой вектор ультразвука

направлен по оси  $z$ , а направление колебаний в волне совпадает с осью  $y$ . Неравная нулю компонента деформации  $\gamma_4 = 2\gamma_{23}$  в этом случае приводит к появлению компоненты  $\Delta\varepsilon_{23}$  тензора изменения диэлектрической проницаемости:

$$\Delta\varepsilon_{23} = -n^4 p_{44} \gamma_4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.1.6), видим, что в случае поляризации падающего света по оси  $x$  дифракции в изотропной среде с поперечной упругой волной не происходит вовсе. Если падающая волна поляризована по оси  $y$ , то дифрагированная волна будет поляризована по оси  $z$ , а в случае поляризации падающей волны по оси  $z$  дифрагированная волна окажется поляризованной по  $y$ .

Наблюдающееся явление кажется похожим на анизотропную дифракцию света, так как поперечная упругая волна в изотропном теле создает такую фазовую решетку, которая при дифракции поворачивает плоскость поляризации света на  $90^\circ$ . Если перейти к собственным осям тензора диэлектрической проницаемости среды, по которой распространяется поперечная упругая волна, то тензор диэлектрической проницаемости приобретает диагональный вид, и показатели преломления для трех главных осей равны  $n_1 = \sqrt{\varepsilon}$ ;  $n_2 = \sqrt{\varepsilon - \Delta\varepsilon}$ ;  $n_3 = \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon}$ . Главные оси тензора диэлектрической проницаемости повернуты относительно осей  $y$  и  $z$  на  $45^\circ$  вокруг оси  $x$ :  $z' = z/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}$ ,  $y' = -z/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}$ . Вдоль осей  $y'$  и  $z'$  изменения показателей преломления соответственно равны  $\Delta n_2 = n^3 p_{44} \gamma_{23}$ ;  $\Delta n_3 = -n^3 p_{44} \gamma_{23}$ . Если поляризация падающего света совпадает с направлением  $y'$  или  $z'$ , то дифрагированный свет имеет то же направление поляризации, что и падающий. Однако фаза компоненты, поляризованной по  $y'$ , отличается от фазы ортогональной компоненты на  $\pi$ . Это отличие и приводит к тому, что для света, поляризованного под углом  $45^\circ$  к оси  $y'$ , при дифракции происходит поворот плоскости поляризации на  $\pi/2$ .

Тот факт, что при дифракции света в изотропной среде явление всегда можно объяснить с помощью изотропной дифракции одной или двух различных компонент падающего света, дает основание называть ее изотропной дифракцией и считать, что анизотропная дифракция может происходить только в анизотропной среде.

### 3.6 Коллинеарное взаимодействие света и звука

Коллинеарным взаимодействием света и упругой волны, называется такое взаимодействие, при котором волновые векторы падающего и дифрагированного света, а также волновой вектор звука лежат на одной прямой. Рассмотрение, проведенное в § 3.3, показало, что коллинеарное взаимодействие наблюдается в двух различных случаях. Либо  $K = |k_i - k_d|$ , в этом случае волновые векторы падающего и дифрагированного света направлены в одну сторону, либо  $K = k_i + k_d$ , этот случай соответствует верхней предельной частоте дифракции, когда дифрагировавший свет направлен навстречу падающему.

Рассмотрим сначала первый из этих двух случаев. Он возможен только в анизотропной среде и в форме анизотропной дифракции. Падающий и дифраги-

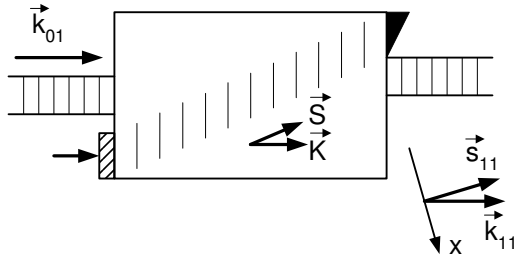


Рис. 3.20. Коллинеарное взаимодействие света и звука при наличии сноса

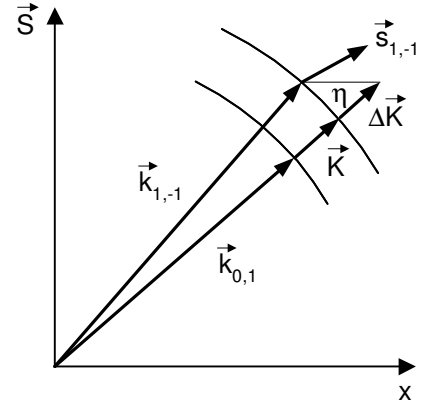


Рис. 3.21. Отклонение от коллинеарности взаимодействия при изменении частоты звука

ровавший свет разделяются с помощью поляризационной призмы. На рис. 3.20 изображена одна из возможных принципиальных схем коллинеарного взаимодействия света и звука в анизотропной среде, обладающей значительным углом сноса акустической волны. Ось  $x$ , вдоль которой происходит изменение амплитуды падающей и дифрагировавшей световых волн, направлена ортогонально лучевому вектору звука в соответствии с рассмотрением, проведенным в § 3.1.

Амплитуды падающей и дифрагированной волн в этом случае описываются соотношениями (3.2.7), причем изменение частоты акустической волны приводит к повороту волнового вектора дифрагированного света в соответствии с рис. 3.21. При определенной частоте звука  $f_0$  волновой вектор  $\vec{k}_{1,-1}(f_0)$  совпадает по направлению с векторами  $\vec{k}_{01}$  и  $\vec{K}$  и равен их разности. С изменением частоты звука (или света) направление  $\vec{k}_{1,-1}$  меняется, т. е. появляется расстройка  $\eta$ , увеличение которой приводит к уменьшению интенсивности дифрагированной волны. На рис. 3.21 показан вектор  $\vec{k}_{1,-1}(f_0 + \Delta f)$  при изменении волнового вектора звука на величину  $\Delta K = 2\pi\Delta f/v$ .

Найдем связь между расстройкой  $\eta$  и изменением частоты звука  $\Delta f$ . При  $f = f_0$  волновые векторы удовлетворяют соотношению

$$\vec{k}_{01} + \vec{K}(f_0) - \vec{k}_{1,-1}(f_0) = 0.$$

При  $f = f_0 + \Delta f$  справедливо векторное равенство

$$\eta \vec{\xi}_x = \vec{k}_{1,-1}(f) - \vec{k}_{01} - \vec{K}(f),$$

где  $\vec{\xi}_x$  — единичный вектор вдоль оси  $x$ .

Складывая эти равенства, получаем

$$\eta \vec{\xi}_x = \vec{k}_{1,-1}(f) - \vec{k}_{1,-1}(f_0) - 2\pi\Delta f \vec{K}/|\vec{K}|v. \quad (3.6.1)$$

Разложим разность векторов  $\vec{k}_{1,-1}(f) - \vec{k}_{1,-1}(f_0)$  в ряд Тейлора и ограничимся первым членом разложения:

$$\vec{k}_{1,-1}(f) - \vec{k}_{1,-1}(f_0) = \frac{d\vec{k}_{1,-1}}{df} \Delta f. \quad (3.6.2)$$



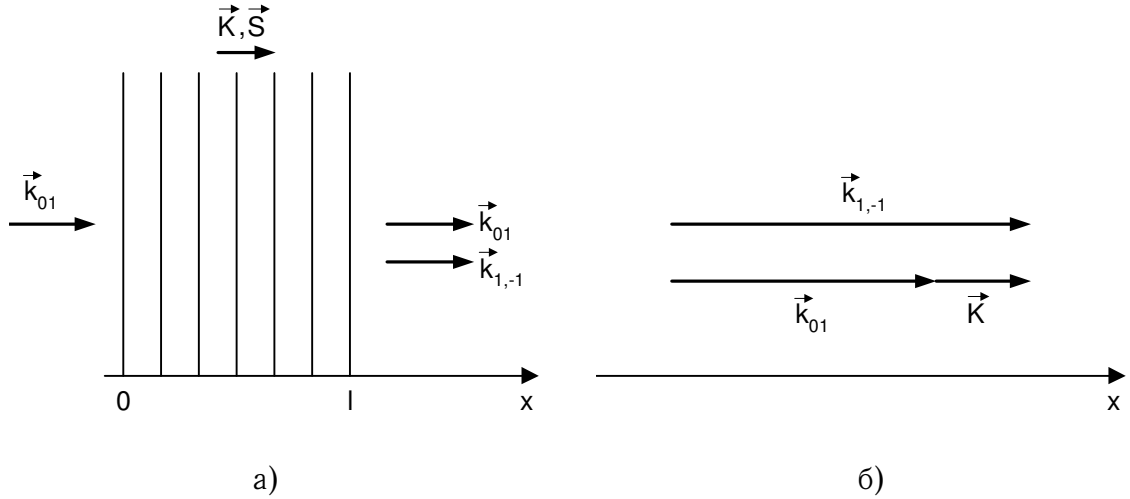


Рис. 3.22. Коллинеарное взаимодействие при отсутствии сноса:  
а — схема взаимодействия; б — векторная диаграмма

Вектор, стоящий в правой части (3.6.2), является касательным к поверхности волновых векторов в точке  $f = f_0$ . Подставим теперь (3.6.2) в (3.6.1) и умножим получившееся равенство на единичный лучевой вектор дифрагированной волны  $\vec{s}_{1,-1}$ . Получим связь  $\eta$  и  $\Delta f$  в виде

$$\eta = -\frac{\Delta f}{f} \frac{\vec{s}_{1,-1} \vec{K}}{\vec{s}_{1,-1} \vec{\xi}_x} = -\frac{\vec{s}_{1,-1} \Delta \vec{K}}{\vec{s}_{1,-1} \vec{\xi}_x}. \quad (3.6.3)$$

При выводе (3.6.3) было учтено, что лучевой вектор является нормалью к поверхности волновых векторов и ортогонален вектору изменения  $\vec{k}_{1,-1}$ .

Для получения соотношения (3.6.3) нами не использовалась явно коллинеарность геометрии взаимодействия. Поэтому (3.6.3) справедливо всегда, когда ось  $x$  перпендикулярна лучевому вектору звука. Из соотношения ясно, что избирательность анизотропной дифракции уменьшается, когда лучевой вектор дифрагированного света ортогонален волновому вектору звука. В этом случае  $\eta = 0$ , что свидетельствует о квадратичной зависимости  $\eta$  от  $\Delta f$ . Избирательность увеличивается, когда лучевой вектор дифрагированного света приближается к лучевому вектору звука. Из рис. 3.20 видно, что в этом случае увеличивается эффективная длина области взаимодействия света и звука при заданной ширине звукового пучка вдоль оси  $x$ . Однако переход к предельному случаю  $\vec{s}_{1,-1} \parallel \vec{S}$  в (3.6.3) является некорректным, так как в этом случае необходимо учитывать конечность размеров звукового пучка вдоль направления  $\vec{S}$ .

Для учета размера звукового пучка вдоль направления его лучевого вектора рассмотрим коллинеарное акустооптическое взаимодействие, геометрия которого приведена на рис. 3.22. Звуковой пучок распространяется в направлении оси  $x$  и ограничен областью  $0 \leq x \leq l$ . В этом же направлении распространяется свет с волновым вектором  $\vec{k}_{01}$ . При частоте звука  $f_0$  происходит коллинеарное брэгговское взаимодействие, характеризуемое равенством  $k_{1,-1} = k_{01} + K$ . Если ширина звукового пучка в направлении, перпендикулярном  $x$ , достаточно велика, то изменение частоты звука  $f$  не нарушает коллинеарности взаимодействия. В этом случае рассинхронизм  $\eta$  равен  $-\Delta K$ , так что при изменении  $f$



вектор  $\vec{k}_{1,-1}$  остается постоянным, но амплитуда дифрагированного света убывает с отходом  $f$  от  $f_0$ .

Если при коллинеарном взаимодействии света и звука ограничиться случаями распространения волн вдоль кристаллофизических осей, то для кристаллов всех классов могут быть рассчитаны изменения тензора диэлектрической проницаемости  $\Delta\epsilon_{ij}$ , соответствующие коллинеарной дифракции. Такая дифракция имеет место лишь при условии, что под действием упругой деформации происходит поворот осей среды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света. Для световых волн, направленных по кристаллофизическим осям, поворот осей среды обеспечивается отличными от нуля фотоупругими константами, расположенными на 4, 5 и 6 строках матрицы фотоупругих коэффициентов.

В [таблице 3.1](#) приведены результаты расчета  $p_z$  для кристаллов различных классов в случае распространения продольных и сдвиговых акустических волн по кристаллофизическим осям. Очевидно, что коллинеарная анизотропная дифракция невозможна в кубических кристаллах и изотропных средах вследствие отсутствия у них анизотропии. Она невозможна также в кристаллах ромбической системы, а также в классах  $622$ ,  $6mm$ ,  $\bar{6}m2$ ,  $6/mmm$  гексагональной и  $422$ ,  $4mm$ ,  $\bar{4}2m$ ,  $4/mmm$  тетрагональной систем, так как у кристаллов этих классов фотоупругие константы, ответственные за поворот осей среды, равны нулю. В кристаллах классов  $6$ ,  $\bar{6}$  и  $6/m$ , а также  $4$ ,  $\bar{4}$  и  $4/m$  коллинеарная дифракция может быть реализована на сдвиговых упругих волнах, распространяющихся по оси  $x$  с деформацией  $\gamma_5$  или  $y$  с деформацией  $\gamma_4$ . В обоих случаях дифракция определяется фотоупругой константой  $p_{45}$ . Значительно большее количество фотоупругих коэффициентов может быть использовано для осуществления коллинеарной дифракции в кристаллах тригональной, моноклинной и триклинной систем. Следует отметить, что эффективное коллинеарное взаимодействие возможно лишь при условии, что фотоупругие константы  $p_{\mu\nu}$ , указанные в [таблице 3.1](#), не слишком малы ( $p_{\mu\nu} \gtrsim 0,05$ ). В большинстве изученных к настоящему времени кристаллов это условие не выполняется. Именно этим обстоятельством объясняется тот факт, что коллинеарная дифракция была реализована лишь в кристаллах кварца и ниобата лития на продольной волне ультразвука, бегущей по оси  $x$  и на сдвиговой волне по оси  $y$ , а также в кристалле молибдата кальция на сдвиговой волне по оси  $x$ .

Коллинеарное взаимодействие возможно также и при распространении волн под углом к кристаллофизическим осям. Это, в принципе, расширяет круг материалов, пригодных для наблюдения коллинеарного взаимодействия. Однако расчет эффективности дифракции в этом случае оказывается значительно более сложным, чем при рассмотрении взаимодействия по осям.

С помощью уравнений [\(3.2.6\)](#) можно рассматривать и коллинеарную дифракцию на верхней предельной частоте. Такой вид взаимодействия может иметь характер как анизотропной, так и изотропной дифракции. Наиболее существенной особенностью взаимодействия в этом случае является то, что дифрагированный луч направлен навстречу падающему ([рис. 3.23](#)). Будем считать, что область взаимодействия ограничена в направлении  $x$ , совпадающем с направлением падающего света. Лучевой вектор отраженной дифрагированной волны образует с осью  $x$  тупой угол и это приводит к тому, что  $q_{1\alpha}$  оказывается

Таблица 3.1. Эффективные упругооптические постоянные коллинеарного взаимодействия

Система	Кристаллографический класс	Направление и поляризация звука	Деформация	$p_{\varepsilon}$
Кубическая	$23, m\bar{3}, 432, \bar{4}3m, m\bar{3}m$	—	—	—
Гексагональная	$622, 6mm, \bar{6}m2, 6/mmm$	—	—	—
	$6, \bar{6}, 6/m$	$x \perp$ $y \perp$	$\gamma_5$ $\gamma_4$	$p_{45}$ $-p_{45}$
Тетрагональная	$422, 4mm, \bar{4}2m, 4/mmm$	—	—	—
	$4, \bar{4}, 4/m$	$x \perp$ $y \perp$	$\gamma_5$ $\gamma_4$	$p_{45}$ $-p_{45}$
Тригональная	$32, 3m, \bar{3}/m$	$x \parallel$ $y \perp$	$\gamma_1$ $\gamma_6$	$p_{41}$ $p_{41}$
		$x \parallel$ $y \parallel$	$\gamma_1$ $\gamma_2$	$p_{41}$ $-p_{51}$
	$3, \bar{3}$	$x \perp$ $y \perp$	$\gamma_5$ или $\gamma_6$ $\gamma_4$ или $\gamma_6$	$p_{45}$ или $p_{52}$ $-p_{45}$ или $p_{41}$
Ромбическая	$2mm, 222, mmm$	—	—	—
Моноклинная	$m, 2, 2/m$	$z \parallel$ $x \perp$ $y \perp$	$\gamma_3$ $\gamma_5$ $\gamma_4$	$p_{63}$ $p_{45}$ $p_{54}$
Триклинная	$1, \bar{1}$	$x \parallel$	$\gamma_1$	$p_{41}$
		$y \parallel$	$\gamma_2$	$p_{52}$
		$z \parallel$	$\gamma_3$	$p_{63}$
		$x \perp$	$\gamma_5$ или $\gamma_6$	$p_{45}$ или $p_{46}$
		$y \perp$	$\gamma_4$ или $\gamma_6$	$p_{54}$ или $p_{56}$
		$z \perp$	$\gamma_4$ или $\gamma_5$	$p_{64}$ или $p_{65}$

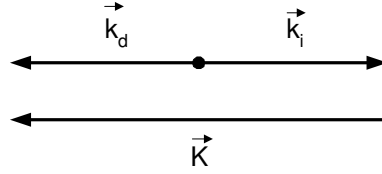


Рис. 3.23. Векторная диаграмма рассеяния на предельной частоте

отрицательной величиной. Уравнения (3.2.6) принимают вид

$$2 \frac{dC_{01}}{dx} = -q_{01} C_{1\alpha} \exp(-j\eta x); \quad 2 \frac{dC_{1\alpha}}{dx} = -|q_{1\alpha}| C_{01} \exp(j\eta x), \quad (3.6.4)$$

где  $\eta = k_i + k_d - K = \Delta K$ .

Система уравнений (3.6.4) должна быть проинтегрирована при граничных условиях  $C_{01}(0) = 1$ ,  $C_{1\alpha}(0) = 0$ .

В результате интегрирования получаются следующие значения амплитуд  $C_{01}$  и  $C_{1\alpha}$  внутри области взаимодействия:

$$\begin{aligned} C_{01} &= \frac{q_{\vartheta} \operatorname{ch}[q_{\vartheta}(l-x)/2] + j\eta \operatorname{sh}[q_{\vartheta}(l-x)/2]}{q_{\vartheta} \operatorname{ch}(q_{\vartheta}l/2) + j\eta \operatorname{sh}(q_{\vartheta}l/2)} \exp(j\eta x/2); \\ C_{1\alpha} &= \frac{|q_{1\alpha}| \operatorname{sh}[q_{\vartheta}(l-x)/2]}{q_{\vartheta} \operatorname{ch}(q_{\vartheta}l/2) + j\eta \operatorname{sh}(q_{\vartheta}l/2)} \exp(-j\eta x/2), \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

где  $q_{\vartheta} = \sqrt{q_{01}|q_{1\alpha}| - \eta^2}$ .

Амплитуда падающей волны на выходе из области взаимодействия равна  $C_{01}(l) = \operatorname{ch}^{-1}(q_{\vartheta}l/2)$ . Это монотонно убывающая с ростом  $l$  величина. Амплитуда дифрагированной волны на выходе из области взаимодействия (при  $x = 0$ ) равна  $C_{1\alpha}(0) = \sqrt{|q_{1\alpha}|/q_{01}} \operatorname{th}(q_{\vartheta}l/2)$ . В этом случае, как и обычно при отражении от дифракционной решетки (см. § 2.6), дифрагированная волна увеличивает свою амплитуду монотонно с ростом  $l$  и не имеет периодических колебаний, характерных для дифракции проходящей волны.

Коллинеарное взаимодействие света и звука наиболее широко используется при создании акустооптических фильтров (см. гл. 9).

### 3.7 Анизотропная дифракция света в среде с искусственной анизотропией

Ряд особенностей анизотропной дифракции света позволяет существенно улучшать характеристики акустооптических устройств по сравнению с теми, которые могут быть получены в аналогичных устройствах с изотропной дифракцией. Однако эффективных материалов для анизотропной дифракции относительно мало. В то же время имеется довольно большое количество кубических кристаллов и различных стекол, обладающих высоким акустооптическим качеством, но не имеющих оптической анизотропии. Анизотропию в таких средах можно создать искусственно, а затем использовать эти материалы в акустооптических устройствах с анизотропной дифракцией [70].

Искусственную анизотропию в среде можно создать различными способами: путем механического сжатия или растяжения, электрическим полем и т.д. Проще всего это сделать с помощью внешнего давления.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда продольная акустическая волна распространяется по оси  $z$  кубического кристалла, принадлежащего к классу 23 или  $m\bar{3}$ . Будем считать, что внешнее давление создает в среде продольную статическую деформацию  $\bar{\gamma}$  в плоскости  $xz$  под углом  $\alpha$  к оси  $x$ . Эта деформация имеет вид (в матричной форме записи)

$$\gamma_{\mu} = \bar{\gamma} \{ \cos^2 \alpha; \quad 0; \quad \sin^2 \alpha; \quad 0; \quad \sin 2\alpha; \quad 0 \}. \quad (3.7.1)$$

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды с искусственной анизотропией, вызванной деформацией (3.7.1), равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_0 + \bar{\gamma} \varepsilon_0^2 (p_{11} \cos^2 \alpha + p_{13} \sin^2 \alpha); \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_0 + \bar{\gamma} \varepsilon_0^2 (p_{12} \sin^2 \alpha + p_{13} \cos^2 \alpha); \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_0 + \bar{\gamma} \varepsilon_0^2 (p_{11} \sin^2 \alpha + p_{12} \cos^2 \alpha); \\ \varepsilon_{13} &= \bar{\gamma} \varepsilon_0^2 p_{44} \sin 2\alpha; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0. \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Собственные оси тензора (3.7.2) не совпадают с кристаллографическими осями исходного кристалла. Для перехода к главным осям анизотропной среды необходимо повернуть систему координат вокруг оси  $y$  на угол  $\beta$ , определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}} = \frac{2p_{44} \sin 2\alpha}{(p_{11} - p_{13}) \sin^2 \alpha + (p_{12} - p_{11}) \cos^2 \alpha}. \quad (3.7.3)$$

Угол поворота  $\beta$  оказывается независимым от величины постоянной деформации, он определяется фотоупругими константами среды и направлением действия статической силы.

В системе координат, повернутой на угол  $\beta$  относительно кристаллографических осей исходной среды тензор диэлектрической проницаемости (3.7.2) является диагональным с тремя различными главными значениями. Если теперь в этой среде с искусственной анизотропией вдоль кристаллографической оси  $z$  распространяется продольная акустическая волна с амплитудой деформации  $\gamma_0$ , то эта волна вызывает изменение всех главных компонент диэлектрической проницаемости и появление компоненты  $\Delta\varepsilon_{13}$ , пропорциональной  $\gamma_0$ :

$$2\Delta\varepsilon_{13} = (\varepsilon'_{33} - \varepsilon'_{11}) \sin 2\beta - 2\varepsilon'_{13} \cos 2\beta, \quad (3.7.4)$$

где  $\varepsilon'_{11}$ ,  $\varepsilon'_{33}$  и  $\varepsilon'_{13}$  — компоненты тензора (3.7.2), измененного в результате воздействия распространяющейся акустической волны. Продольная акустическая волна с амплитудой  $\gamma_0$  меняет только третью компоненту деформации (3.7.1), поэтому  $\varepsilon'_{13} = \varepsilon_{13}$  и  $\Delta\varepsilon_{13}$  равна

$$\Delta\varepsilon_{13} = \frac{\varepsilon_0^2 (p_{11} - p_{13}) \gamma_0}{2 \sqrt{1 + \left[ \frac{(p_{11} - p_{13}) \sin^2 \alpha + (p_{12} - p_{11}) \cos^2 \alpha}{2p_{44} \sin 2\alpha} \right]^2}}. \quad (3.7.5)$$

Компонента  $\Delta\epsilon_{13}$  определяет анизотропную дифракцию в среде с искусственной анизотропией, описываемой тензором (3.7.1). Например, световая волна, распространяющаяся вдоль оси  $y$ , и имеющая поляризацию по  $x$ , после дифракции будет поляризована по оси  $z$ .

В соответствии с (3.1.2) коэффициент в первой части (3.7.5) при  $\epsilon_0^2\gamma_0$  является эффективной фотоупругой постоянной  $p_\vartheta$ .

При анализе зависимости  $p_\vartheta$  от  $\alpha$  удобно ввести величины  $p_1 = (p_{11} - p_{13})/p_{44}$  и  $p_2 = (p_{12} - p_{11})/p_{44}$ . Если  $p_2/p_1 < 0$ , то  $p_\vartheta$  достигает своего максимального значения, равного  $(p_{13} - p_{11})/2$ , при  $\alpha = \arctg \sqrt{-p_2/p_1}$ . Если  $p_2/p_1 > 0$ , то  $p_{\vartheta \text{ макс}} = (p_{13} - p_{11})/2\sqrt{1 + p_1 p_2}$ . Это значение  $p_\vartheta$  достигается при  $\alpha = \arctg \sqrt{p_2/p_1}$ .

Аналогичным образом могут быть рассчитаны значения  $p_\vartheta$  и для поперечных акустических волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ .

В таблице 3.2 приведены результаты расчета  $p_\vartheta$  для ряда вариантов [70]. Продольная статическая деформация всюду считается ортогональной одной из кристаллографических осей. Продольная или поперечная акустическая волна, распространяется вдоль оси  $z$ .

Все эти результаты применимы и к кубическим кристаллам классов  $\bar{4}3m$ ,  $432$  и  $m\bar{3}m$ , если положить  $p_{12} = p_{13}$  и к изотропным средам, для которых справедливо дополнительное условие  $p_{44} = (p_{11} - p_{12})/2$ . В случае изотропной среды за  $z$  можно выбрать любое направление. При дифракции на продольной акустической волне, если свет падает нормально к звуковому пучку,

$$p_\vartheta = (1/2)(p_{12} - p_{11}) \sin 2\alpha.$$

Таким образом, максимум эффективности дифракции должен наблюдаться, когда продольная статическая деформация  $\bar{\gamma}$  направлена под углом  $45^\circ$  к направлению распространения звука. При этом  $p_\vartheta = (p_{12} - p_{11})/2$ . Той же величине равно  $p_\vartheta$  при дифракции на поперечной акустической волне, но максимальное значение  $p_\vartheta$  достигается при  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 90^\circ$ . Последний вариант из практических соображений представляется наиболее удобным.

Основной характеристикой материалов, используемых в акустооптических устройствах, является акустооптическое качество  $M = p_\vartheta^2 n^6 / \rho v^3$  (2.1.22). В табл. 3.3 приведены численные значения  $M$  для стекол и кубических кристаллов, которые могут быть использованы, как среды с искусственной анизотропией. При расчете использовались известные из литературы значения фотоупругих констант материалов [71]. Поскольку значения  $p_\vartheta$  и  $v$  зависят от направления распространения световых и акустических волн и статической деформации  $\bar{\gamma}$ , то в таблице приведены значения  $M$ , соответствующие оптимальным вариантам.

Как следует из табл. 3.2, эффективность анизотропной дифракции не зависит от величины статической деформации. Влияние статической деформации заключается в том, что, создавая условия для появления анизотропной дифракции, она в то же время определяет характер зависимости угла Брэгга от частоты акустической волны  $f$ :

$$\sin \theta_B = \frac{\lambda}{2nv} \left[ f \pm \frac{2nv^2}{f\lambda^2} \Delta n \right],$$

Таблица 3.2: Эффективная упругооптическая постоянная в средах с искусственной анизотропией, созданной за счет упругой деформации

Направление и поляризация акустичес- кой волны	Направление световой волны	Продольная статическая деформация	$p_{\varepsilon}$	$p_{\text{эмакс}}$	$\alpha_{\text{онт}}$
$z, z$	$x$	$\bar{\gamma} \perp x$	$\frac{p_{12} - p_{11}}{2\sqrt{1 + (p_1 \operatorname{ctg} \alpha + p_2 \operatorname{tg} \alpha)^2}}$	$(p_{12} - p_{11})/2$ при $p_2/p_1 < 0$ $\frac{p_{12} - p_{11}}{2\sqrt{1 + p_1 p_2}}$ при $p_2/p_1 > 0$	$\operatorname{arctg} \sqrt{-p_1/p_2}$ $\operatorname{arctg} \sqrt{p_1/p_2}$
		$\bar{\gamma} \perp y; \bar{\gamma} \perp z$	0	0	
	$y$	$\bar{\gamma} \perp x; \bar{\gamma} \perp z$	0	0	
		$\bar{\gamma} \perp y$	$\frac{p_{13} - p_{11}}{2\sqrt{1 + (p_1 \operatorname{tg} \alpha + p_2 \operatorname{ctg} \alpha)^2}}$	$(p_{13} - p_{11})/2$ при $p_2/p_1 < 0$ $\frac{p_{13} - p_{11}}{2\sqrt{1 + p_1 p_2}}$ при $p_2/p_1 > 0$	$\operatorname{arctg} \sqrt{-p_2/p_1}$ $\operatorname{arctg} \sqrt{p_2/p_1}$
	$z$	$\bar{\gamma} \perp x; \bar{\gamma} \perp y$	0	0	
		$\bar{\gamma} \perp z$	$\frac{p_{12} - p_{13}}{2\sqrt{1 + (p_1 \operatorname{tg} \alpha + p_2 \operatorname{ctg} \alpha)^2}}$	$(p_{12} - p_{13})/2$ при $p_2/p_1 < 0$ $\frac{p_{12} - p_{13}}{2\sqrt{1 + p_1 p_2}}$ при $p_2/p_1 > 0$	$\operatorname{arctg} \sqrt{-p_2/p_1}$ $\operatorname{arctg} \sqrt{p_2/p_1}$

См. *продолжение*

Продолжение табл. 3.2

Направление и поляризация акустичес- кой волны	Направление световой волны	Продольная статическая деформация	$p_{\varepsilon}$	$p_{\varepsilon \max}$	$\alpha_{\text{опт}}$
$z, y$	$x$	$\bar{\gamma} \perp x$	$\frac{p_{44}}{\sqrt{1 + \left( \frac{4}{p_1 \operatorname{ctg} \alpha + p_2 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2}}$	$p_{44}$	$0; \pi/2$
		$\bar{\gamma} \perp y; \bar{\gamma} \perp z$	$p_{44}$	$p_{44}$	любой
	$y; z$	любая	0	0	
$z, x$	$x; z$	любая	0	0	
	$y$	$\bar{\gamma} \perp x; \bar{\gamma} \perp z$	$p_{44}$	$p_{44}$	любой
		$\bar{\gamma} \perp y$	$\frac{p_{44}}{\sqrt{1 + \left( \frac{4}{p_1 \operatorname{tg} \alpha + p_2 \operatorname{ctg} \alpha} \right)^2}}$	$p_{44}$	$0; \pi/2$

Таблица 3.3. Характеристики упругооптических материалов

Материал	$\lambda$ , мкм	$n$	$\rho$ , $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Направление и поляризация акустической волны	$v$ , $10^3$ м/с	$p_{ij}$	$M$ , $10^{-15}$ с/кг
Плавленный кварц	0,63	1,46	2,2	$\parallel$ $\perp$	5,95 3,76	$p_{11} = 0,121$ $p_{12} = 0,270$	0,12 0,47
As <sub>2</sub> S <sub>3</sub>	0,63	2,61	3,20	$\parallel$	2,6	$p_{11} = 0,277$ $p_{12} = 0,272$	0,035
KRS-5	0,63	2,75	7,36	[100], $\parallel$ [100], $\perp$	2,078 0,874	$p_{11} = 0,213$ $p_{12} = 0,144$ $p_{44} = 0,149$	5,2 1300
KRS-6	0,63	2,31	7,14	[100], $\parallel$ [100], $\perp$	2,32 1,075	$p_{11} = 0,091$ $p_{12} = 0,066$ $p_{44} = 0,086$	0,27 130
GaP	0,63	3,31	4,18	[100], $\perp$	4,13	$p_{44} = -0,074$	25
YAG	0,63	1,83	4,55	[100], $\perp$	5,03	$p_{44} = -0,061$	0,25
YIG	1,15	2,22	5,17	[100], $\perp$	3,85	$p_{44} = 0,041$	0,7
SrTiO <sub>3</sub>	0,63	2,38	5,12	[100], $\perp$	4,91	$p_{44} = 0,072$	1,6
GaAs	1,15	3,37	5,34	[100], $\perp$	3,32	$p_{44} = -0,072$	39
As <sub>2</sub> Se <sub>3</sub>	1,15	2,89	4,64	$\parallel$ $\perp$	2,25 1,227	$p_{11} = 0,314$ $p_{12} = 0,266$ $p_{44} = 0,024$	6,3 40
Ge	10,6	4,00	5,4	[100], $\perp$	3,51	$p_{44} = -0,073$	93,5



где  $\Delta n$  — наведенное статической деформацией двулучепреломление среды. Величина  $\Delta n$  может быть найдена из тензора деформации (3.7.2):

$$2n\Delta n = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + 4\varepsilon_{13}^2}.$$

Для изотропной среды  $\Delta n = n^3(p_{11} - p_{12})\bar{\gamma}/2$ .

В акустооптических дефлекторах с анизотропной дифракцией света оптимальной является область частот вблизи минимума угла Брэгга. Частота, на которой достигается этот минимум, определяется выражением  $f^* = n^2 v \sqrt{(p_{11} - p_{12})\bar{\gamma}} / \lambda$ . Оценки показывают, что вполне приемлемые величины внешнего давления позволяют выйти по  $f^*$  в диапазон частот 100–500 МГц, который в настоящее время хорошо освоен.

Экспериментальное исследование анизотропной дифракции света в среде с искусственной анизотропией проводилось на изотропном материале — плавленном кварце [70] и в кубическом кристалле — фосфиде галлия [72] (рис. 3.24). Входным поляроидом  $P_1$  устанавливалась поляризация падающего света. Выходной поляроид  $P_2$  позволял выделять в дифрагированном свете компоненту, поляризованную параллельно или перпендикулярно поляризации падающего света. Статическая деформация  $\bar{\gamma}$  создавалась механическим сжатием образца. Продольные ультразвуковые волны распространялись в образце плавленного кварца под углом  $45^\circ$  к направлению статического давления. При исследовании анизотропной дифракции в фосфиде галлия использовалась сдвиговая акустическая волна. В соответствии с табл. 3.2 в этом случае оптимальным является ортогональность  $\bar{\gamma}$  и  $\vec{K}$ .

На рис. 3.25 приведены экспериментальные зависимости угла Брэгга  $\theta_B$  от частоты ультразвуковых волн  $f$  для различных поляризаций падающего и дифрагированного света и различного статического давления для кристалла фосфида галлия. Поляризация падающего света устанавливалась по одной из осей наведенной анизотропии. В том случае, когда в дифрагированном свете регистрировалась компонента с поляризацией, параллельной поляризации падающего светового пучка, зависимость  $\theta_B(f)$  была линейной. При этом численные значения угла Брэгга совпадали для обеих возможных поляризаций падающего света и не зависели от величины внешнего давления. Этот случай соответствовал изотропной дифракции света.

Если же выходной поляроид был установлен перпендикулярно входному, то зависимость  $\theta_B(f)$  имела существенно другой характер. На рис. 3.25 представлены соответствующие кривые для разных величин внешнего давления и при различных поляризациях падающего пучка. Это типичные кривые частотной зависимости угла Брэгга при анизотропной дифракции света. Частота  $f^*$  зависит от внешнего давления и при  $\sigma \approx 10^7$  Н/м<sup>2</sup> двулучепреломление  $\Delta n$  достигало величины  $10^{-4}$ , что соответствовало частотам  $f^* = 150$ – $200$  МГц. Эффективность анизотропной дифракции достигала 40% при управляющей электрической мощности 1 Вт. Величина двулучепреломления  $\Delta n$  измерялась оптическим методом и дала хорошее согласие с величиной, определяемой из рис. 3.25 по разности углов Брэгга для изотропной и анизотропной дифракции при фиксированной частоте  $\theta_a - \theta_u = v\Delta n/f\lambda$ .

Изменение анизотропии в результате внешнего воздействия может быть использовано и в анизотропной среде, например, для того, чтобы обеспечить усло-

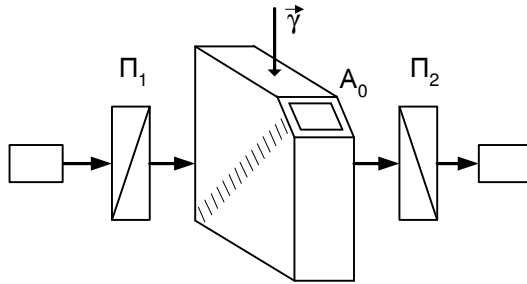


Рис. 3.24. Схема установки для наблюдения анизотропной дифракции в среде с искусственной анизотропией

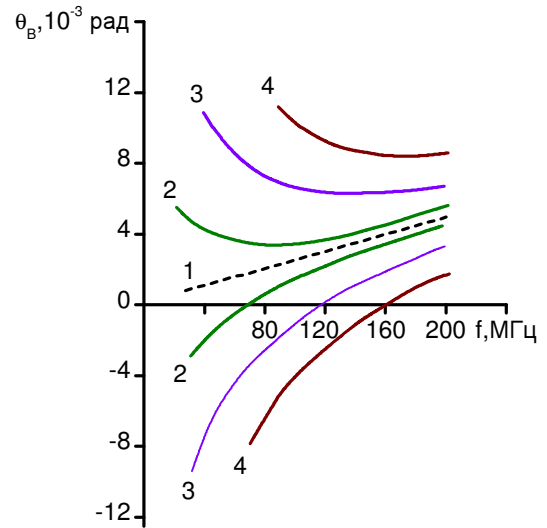


Рис. 3.25. Частотные зависимости угла Брэгга:

- 1 — изотропная дифракция при любом давлении;
- 2 —  $\bar{\gamma} = 1,6 \times 10^{-5}$ ;
- 3 —  $\bar{\gamma} = 4,1 \times 10^{-5}$ ;
- 4 —  $\bar{\gamma} = 8,2 \times 10^{-5}$

вия Брэгга в широкой полосе частот при последовательном возбуждении акустооптической ячейки на различных частотах [73]. В этом случае синхронно с изменением частоты ультразвука при помощи внешнего воздействия (электрического поля, механического напряжения и т. п.) изменяются показатели преломления среды. Поскольку при изменении показателей преломления меняются углы преломления световых лучей на границе среда-воздух, то углы падения  $\theta'_i$  и дифракции  $\theta'_d$  удобнее рассматривать в воздухе. Если боковые грани среды перпендикулярны волновому фронту акустической волны, то для углов падения и дифракции вместо (3.3.3) справедливы такие соотношения:

$$\sin \theta'_{i,d} = \mp \frac{\lambda}{2v} \left[ f \pm \frac{v^2}{\lambda f} (n_i^2 - n_d^2) \right]. \quad (3.7.6)$$

Из (3.7.6) следует, что при изотропной дифракции ( $n_i = n_d$ ) углы падения и дифракции в воздухе не зависят от показателя преломления среды. Поэтому только при анизотропной дифракции можно путем изменения  $n$  удовлетворить условие  $\theta'_i = \text{const}$  в некотором диапазоне частот ультразвука.

Пусть, например, в результате внешнего воздействия меняется величина  $n_d$ , а  $n_i$  остается постоянным. Из (3.7.6) в этом случае легко получить связь между изменением показателя преломления  $\Delta n_d$  и частотой ультразвука  $f$ , при которой  $\theta'_i$  остается постоянным:

$$\Delta n_d = \lambda^2 (f - f_0) (f f_0 - f^{*2}) / 2 n_{d0} v^2 f_0, \quad (3.7.7)$$

где через  $f_0$  обозначена частота, на которой дифракция происходит при отсутствии внешнего воздействия:  $n_{d0} = n_d(f_0)$ . На рис. 3.26 изображена зави-

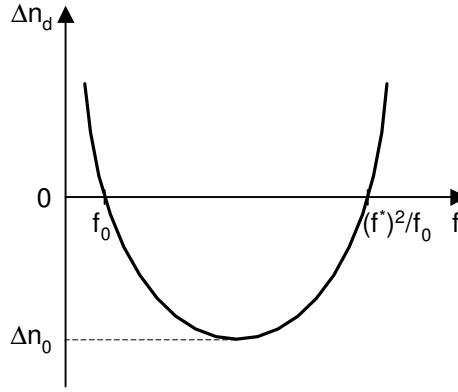


Рис. 3.26. Закон изменения показателя преломления от частоты, при котором происходит полная коррекция угла Брэгга

симость  $\Delta n_d$  от  $f$ , соответствующая соотношению (3.7.7). Величина  $\Delta n_0$  на рисунке равна  $\Delta n_0 = -\lambda^2 (f_0^2 - f^{*2})^2 / 8n_{d0}v^2 f_0$ .

Из рис. 3.26 можно определить диапазон частот  $\Delta f$ , в котором изменением  $n_d$  можно осуществлять полную коррекцию угла Брэгга. Этот диапазон оказывается максимальным в том случае, когда амплитуда изменения  $\Delta n_d$  равна  $\Delta n_0$ . Поэтому для заданного предельного значения  $\Delta n_d$  максимальная полоса частот  $\Delta f$  достигается при  $f_0 = f^* \pm v\sqrt{2n_{d0}\Delta n_d}/\lambda$ .

Частоте  $f_0$  соответствует оптимальный угол падения светового луча  $\theta'_i \approx \lambda f^*/v$ . Таким образом, при заданном максимальном изменении показателя преломления наибольшая ширина полосы частот  $\Delta f$  достигается в том случае, когда частота ультразвука близка к экстремуму угла Брэгга.

Если для коррекции угла Брэгга используется линейный электрооптический эффект в среде [74], то изменение показателя преломления  $\Delta n$  можно записать в виде  $\Delta n = n^3 r_3 E / 2$ , где  $E$  — напряженность электрического поля;  $r_3$  — эффективный электрооптический коэффициент, зависящий от направления  $\vec{E}$  и среза кристалла. Закон изменения напряженности электрического поля от частоты ультразвука, обеспечивающий полную коррекцию угла Брэгга, имеет вид

$$E(f) = \lambda^2 (f - f_0) (f f_0 - f^{*2}) / n^4 r_3 v^2 f_0. \quad (3.7.8)$$

Экспериментально коррекция угла Брэгга с помощью линейного электрооптического эффекта осуществлена в работе [74].

Приведенные в данном параграфе результаты показывают, что даже слабая анизотропия среды ( $\Delta n \sim 10^{-4}-10^{-5}$ ) может существенно изменять характеристики акустооптических устройств. Многие материалы вследствие остаточных напряжений обладают оптической анизотропией такого порядка. Поэтому при расчете и создании различных акустооптических устройств необходимо учитывать даже слабую оптическую анизотропию. Что касается практического использования искусственной анизотропии в акустооптических элементах, то здесь основные трудности связаны с созданием сред с однородной по большому объему статической деформацией.