

Глава 2

Изотропная дифракция света

Явление дифракции света на ультразвуковой волне было предсказано Бриллюэном в 1922 г. [6], а экспериментально осуществлено в 1932 г. Дебаем и Сирсом [27] и Люка и Бикаром [28]. Бриллюэн предсказал, что частота дифрагированного света должна быть сдвинута за счет эффекта Допплера на величину, равную частоте звуковой волны. В своей второй работе [29] Бриллюэн дал общую постановку задачи и ее решение с помощью ряда по функциям Маттье, относящееся к случаю нормального падения волны. Получение численных результатов этим методом оказалось в общем случае невозможным из-за громоздкости промежуточных выкладок, хотя в последние годы с применением ЭВМ были просчитаны новые области параметров, для которых пригодны эти решения [30].

В 1935–36 гг. С. В. Раман и Н. С. Нат [31] представили свою теорию дифракции, в первоначальном варианте которой предполагалось, что звуковой столб подобен двумерной фазовой решетке, в которой световые лучи не изменяют своего направления. Такое рассмотрение дало распределение интенсивности света по дифракционным порядкам, описываемое функциями Бесселя. Последующие исследования показали, что эта теория применима лишь для очень узких звуковых столбов, когда волновой параметр $Q = \lambda l / \Lambda^2 n$ много меньше единицы. В этом выражении λ — длина волны света в вакууме; Λ — длина волны ультразвука; l — длина области взаимодействия света и звука; n — показатель преломления среды. В дальнейших работах Раман и Нат отказались от модели простой фазовой решетки и перешли от волнового уравнения к бесконечной системе связанных дифференциальных уравнений, которые описывают пространственное поведение различных дифракционных порядков при прохождении света через звуковой столб. Эти уравнения были введены для случая малых углов дифракции $\lambda / \Lambda n \ll 1$.

Существенный вклад в исследование дифракции света на ультразвуковых волнах внес С. М. Рытов [32, 33]. Он связал строгое решение Бриллюэна с приближенной теорией Рамана-Ната и разработал метод „плавных возмущений“, позволивший рассчитать интенсивности спектров в случае нормального падения света на ультразвуковой столб.

Интерес к проблеме дифракции света на акустической волне усилился в 50-ые и 60-ые годы, когда проблема была сформулирована в терминах интегральных уравнений [34], параметрической теории [35–37], законов сохранения

энергии и импульса фотон-фононного взаимодействия [38–40].

В 70-ые годы появились работы, в которых намечены теоретические методы решения задачи дифракции света на ультразвуке в самой общей постановке. В [41] рассматривалась дифракция световой волны произвольной формы и спектрального состава на ультразвуковой волне произвольной формы и спектрального состава. В [42] проанализировано взаимодействие произвольного цилиндрического светового пучка с широкополосным ультразвуковым сигналом с учетом отраженных волн. Эти работы дают возможность решить с помощью ЭВМ любую задачу о дифракции света на ультразвуковой волне в изотропной среде.

Физическая картина дифракции света на упругой волне может быть описана следующим образом. Распространение акустической волны в упругооптической среде сопровождается появлением в этой среде бегущей периодической последовательности изменений показателя преломления. Если период этой последовательности меньше ширины светового пучка, то в среде происходит дифракция света на бегущей со скоростью звука фазовой дифракционной решетке. Характер этой дифракции существенно зависит от длины области взаимодействия света и звука l . При достаточно малом l дифракционная решетка может рассматриваться как плоская. В этом случае направления на дифракционные максимумы определяются как в обычной плоской дифракционной решетке [11]: $\sin \theta_p = \sin \theta_0 + p\lambda/\Lambda n$, где θ_p — направление на p -ый дифракционный максимум, θ_0 — угол падения света.

Таким образом, при достаточно малом l дифракционная картина представляет собой набор значительного числа дифракционных максимумов, расположенных симметрично относительно направления падающего света. Такая дифракция называется дифракцией Рамана-Ната, она происходит при любом угле падения света на ультразвуковой столб.

При дифракции Рамана-Ната можно считать, что световой луч проходит через область взаимодействия прямолинейно. Пренебрежение искривлением луча внутри области взаимодействия эквивалентно предположению о чисто фазовой модуляции света при его взаимодействии с упругой волной. Разлагая фазомодулированную волну на выходе из области взаимодействия в угловой спектр, можно получить характерную для дифракции Рамана-Ната картину с большим числом дифракционных максимумов (см. рис. 2.1, а).

Существенно иной характер имеет дифракция света на ультразвуке при большой длине l . Дифракционная решетка в этом случае является трехмерной и при анализе дифракционной картины необходимо учитывать фазовые соотношения между волнами в направлении длины области взаимодействия. Характер дифракции света на ультразвуковой волне с большим l подобен дифракции рентгеновских лучей на кристаллической структуре. Такая дифракция происходит только при определенном угле падения света на ультразвуковой столб, удовлетворяющем так называемому условию Вульфа-Брэгга [12]. Эта дифракция носит название дифракции Брэгга. Для дифракции Брэгга характерно наличие лишь одного дифракционного максимума, который образуется отражением падающего света от фронта бегущей световой волны (см. рис. 2.1, б).

Режимы дифракции Рамана-Ната и Брэгга представляют собой два предельных случая, соответствующих малым и большим длинам области взаимодей-

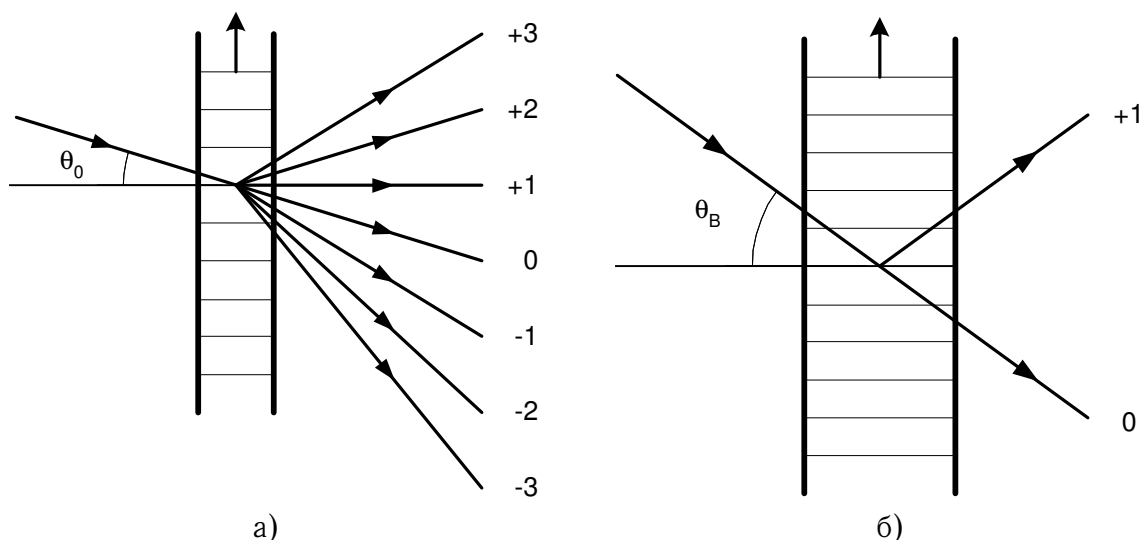


Рис. 2.1. Схема дифракции света на ультразвуке: а — дифракция Рамана-Ната; б — дифракция Брэгга

ствия света и звука. Плавный переход между этими режимами происходит при непрерывном изменении длины l . Таким образом, по мере увеличения l происходит уменьшение числа дифракционных максимумов и сужение допустимых пределов углов падения света. Строгие границы режимов дифракции не могут быть установлены еще и по той причине, что число дифракционных максимумов существенно зависит от мощности ультразвуковой волны P_a , вызывающей дифракцию света. С увеличением P_a число дифракционных максимумов, вообще говоря, растет.

2.1 Система дифференциальных уравнений, описывающих изотропное акустооптическое взаимодействие

Рассмотрим задачу о распространении электромагнитной волны в изотропной среде, в которой по оси z бежит плоская акустическая волна с частотой Ω и волновым числом K . Под действием акустической волны показатель преломления среды изменяется:

$$n(z, t) = n + \Delta n \sin(Kz - \Omega t + \Phi), \quad (2.1.1)$$

где n — показатель преломления невозмущенной среды; Δn — амплитуда изменения показателя преломления; Φ — начальная фаза акустической волны. В однородной плоской акустической волне величины Δn и Φ являются константами, однако акустическая волна может быть и неоднородной. В этом случае (например, при дифракции света на поверхностной акустической волне) Δn и Φ являются медленными функциями координаты x .

Будем считать, что область распространения звука заключена между плоскостями $x = 0$ и $x = l$. Положение этих плоскостей обычно определяется

геометрическими размерами возбудителя звука.

Пусть на плоскость $x = 0$ под углом θ_0 к оси x падает плоская электромагнитная волна

$$E = E_0 \exp[j(k_0 x \cos \theta_0 + k_0 z \sin \theta_0 - \omega_0 t)], \quad (2.1.2)$$

где E_0 — амплитуда падающей волны, ω_0 — ее частота, а $k_0 = 2\pi n/\lambda$ — волновое число.

Не теряя общности задачи, можно считать, что все поля не зависят от координаты y . Поэтому волновое уравнение для световой волны в области взаимодействия света и звука ($0 \leq x \leq l$) записывается в таком виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\varepsilon E)}{\partial t^2}. \quad (2.1.3)$$

Поскольку изменение показателя преломления под действием акустической волны мало по сравнению с величиной невозмущенного показателя преломления n , диэлектрическую проницаемость среды ε при наличии акустической волны обычно можно представить в виде:

$$\varepsilon = n^2 + 2n\Delta n \sin(Kz - \Omega t + \Phi). \quad (2.1.4)$$

Решение уравнения (2.1.3), т. е. электрическое поле в области взаимодействия света и звука, естественно искать в виде суммы дифракционных максимумов — собственных волн среды, имеющих частоты $\omega_p = \omega_0 + p\Omega$, где p — целое положительное или отрицательное число, определяющее номер дифракционного максимума. Амплитуды максимумов должны зависеть от координаты x . При отыскании направлений распространения максимумов необходимо иметь в виду, что все эти максимумы рождаются в слое толщины l по оси x и неограниченно протяженном вдоль осей y и z . Поэтому проекция импульса (волнового вектора) на оси y и z должны удовлетворять закону сохранения:

$$k_{py} = k_{0y} = 0; \quad k_{pz} = k_0 \sin \theta_0 + pK. \quad (2.1.5)$$

Эти же соотношения вытекают из граничных условий для поля E при $x = 0$.

Что касается проекции волнового вектора на ось x , то она может испытывать скачок, допустимая величина которого тем больше, чем меньше длина взаимодействия света и звука l . Поскольку полная величина вектора \vec{k}_p однозначно определяется частотой света и показателем преломления

$$|\vec{k}_p| = \omega_p n / c, \quad (2.1.6)$$

то проекция \vec{k}_p на ось x может быть найдена из соотношения

$$k_{px} = \pm \sqrt{k_p^2 - k_{pz}^2}.$$

Положив k_{px} равным арифметическому значению корня, увидим, что компонента поля с частотой ω_p должна состоять из двух волн с проекциями волнового вектора на ось x , равными $\pm k_{px}$. Одна из этих волн соответствует дифракции света вперед (проходящая волна), а другая — назад, против распространения исходной волны (отраженная волна) (см. [рис. 2.2, а](#)).

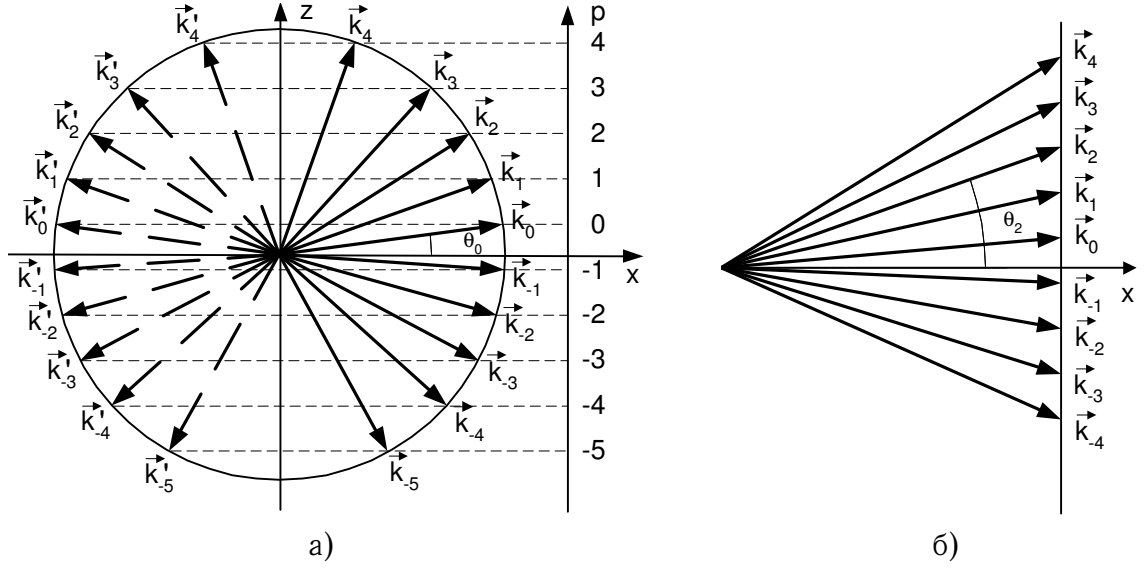


Рис. 2.2. Угловое распределение дифракционных максимумов:
а — при заданной величине вектора \vec{k} ; б — в случае, соответствующем уравнению Рамана-Ната

Приведенные рассуждения дают основания искать электрическое поле в области $0 \leq x \leq l$ в виде суммы дифракционных максимумов:

$$E = E_0 \sum_p \sum_{\alpha=\pm 1} \{C_{p,\alpha}(x) \exp[j(\alpha k_{px}x + k_{pz}z - \omega_p t)]\}. \quad (2.1.7)$$

Полное число членов суммы (2.1.7) всегда конечно и тем больше, чем меньше K/k_0 . Например, в случае, изображенном на рис. 2.2, а, кроме нулевого дифракционного максимума возможны еще 3 положительных и 5 отрицательных дифракционных максимумов. Каждому дифракционному максимуму \vec{k}_p , направленному вперед ($\alpha = 1$, сплошные стрелки на рис. 2.2, а), соответствует максимум \vec{k}'_p , направленный назад ($\alpha = -1$, пунктирные стрелки на рис. 2.2, а). В соответствии с (2.1.7) векторы \vec{k}_p и \vec{k}'_p отличаются только знаком их проекции на ось x . Длина вектора \vec{k}_p , определяемая (2.1.6), практически совпадает с k_0 , так как частота ультразвука, на котором может происходить дифракция света, много меньше частоты света ($\Omega \ll \omega_0$), поэтому на рис. 2.2, а геометрическим местом концов векторов \vec{k}_p является окружность радиуса k_0 . Из геометрии взаимодействия ясно, что угол θ_p между вектором \vec{k}_p и осью x определяется соотношением

$$\sin \theta_p = \sin \theta_0 + pK/k_0. \quad (2.1.8)$$

Поскольку в (2.1.7) неизвестная функция, описывающая амплитуду поля частоты ω_p , заменена двумя функциями $C_{p,1}(x)$ и $C_{p,-1}(x)$, то на эти функции должно быть наложено дополнительное условие. В соответствии с правилами, принятыми в теории колебаний [43], выберем это условие таким, чтобы производная $\partial E/\partial x$ была равна

$$\frac{\partial E}{\partial x} = jE_0 \sum_p \sum_{\alpha=\pm 1} \alpha k_{px} C_{p,\alpha}(x) \exp(j\varphi_{p,\alpha}), \quad (2.1.9)$$

где $\varphi_{p,\alpha} = \alpha k_{px}x + k_{pz}z - \omega_p t$. Равенство (2.1.9) с учетом (2.1.7) означает, что на $C_{p,1}$ и $C_{p,-1}$ наложено дополнительное условие вида:

$$\sum_{\alpha=\pm 1} \frac{dC_{p,\alpha}}{dx} \exp(j\alpha k_{px}x) = 0. \quad (2.1.10)$$

Подставляя предполагаемое решение (2.1.7) с учетом (2.1.9) в уравнение (2.1.3), в правой части которого вместо ε записано (2.1.4), получим такое соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{\alpha=\pm 1} \alpha k_{px} \frac{dC_{p,\alpha}}{dx} \exp(j\varphi_{p,\alpha}) = \\ = \sum_p \sum_{\alpha=\pm 1} \left\{ \frac{\omega_{p+1}^2 n^2}{c^2} \frac{\Delta n}{n} C_{p,\alpha} \exp[j(\varphi_{p,\alpha} + Kz - \Omega t + \Phi)] - \right. \\ \left. - \frac{\omega_{p-1}^2 n^2}{c^2} \frac{\Delta n}{n} C_{p,\alpha} \exp[j(\varphi_{p,\alpha} - Kz + \Omega t - \Phi)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Используя выражение для $\varphi_{p,\alpha}$, приравниваем в левой и правой частях (2.1.11) коэффициенты при экспоненциальных множителях с одинаковыми частотами ω_p . Из полученных соотношений с учетом (2.1.10) найдем следующее уравнение для определения амплитуд $C_{p,\alpha}$:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{p,\alpha}}{dx} = \frac{\alpha q_p}{2} \left[(C_{p-1,\alpha} e^{j\alpha \eta_{p-1}x} + C_{p-1,-\alpha} e^{-j\alpha \xi_{p-1}x}) e^{j\Phi} - \right. \\ \left. - (C_{p+1,\alpha} e^{-j\alpha \eta_p x} + C_{p+1,-\alpha} e^{-j\alpha \xi_p x}) e^{-j\Phi} \right], \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

где $q_p = k_p^2 \Delta n / k_{px} n$; $\eta_p = k_{px} - k_{p+1,x}$; $\xi_p = k_{px} + k_{p+1,x}$; $\alpha = \pm 1$.

Полученная система дифференциальных уравнений первого порядка (2.1.12) полностью эквивалентна исходному уравнению (2.1.3). При ее выводе не делалось никаких пренебрежений. Система уравнений (2.1.12) должна решаться при следующих естественных граничных условиях:

$$C_{0,1}(0) = 1; \quad C_{p,1}(0) = 0 \quad \text{при } p \neq 0; \quad C_{p,-1}(l) = 0. \quad (2.1.13)$$

Из уравнений (2.1.12) следует, что перекачка энергии в p -ый дифракционный максимум может происходить только из двух соседних максимумов, причем как из волн, дифрагирующих вперед, так и из волн, дифрагирующих назад. Прямые двух- или многофононные переходы соотношениями (2.1.12) исключаются. Это связано с ограничением, принятым в (2.1.4), где учтен лишь первый член разложения диэлектрической проницаемости по малому внешнему воздействию. Многофононные процессы могут быть учтены, если продолжить ряд (2.1.4) (см. § 1.4).

Эффективность взаимодействия соседних дифракционных максимумов зависит как от величины Δn , определяемой амплитудой упругой волны, так и от величин η_p и ξ_p , характеризующих рассинхронизм отдельных дифракционных максимумов в направлении оси x . Из (2.1.12) видно, что накапливающееся взаимодействие между соседними максимумами имеет место до тех пор, пока соответствующее $\eta_p x$ или $\xi_p x$ меньше π . Как только $\eta_p x$ становится больше π , энергия начинает перекачиваться в обратную сторону. Длина $x = \pi / \eta_p$ или $x = \pi / \xi_p$

может быть названа длиной когерентного взаимодействия $(p + 1)$ -го и p -го максимумов. При заданной плотности мощности акустической волны длина когерентности определяет максимальную амплитуду соответствующего дифракционного максимума. Из определения величин η_p и ξ_p видно, что длина когерентного взаимодействия для волн, направленных в одну сторону (только вперед или только назад) π/η_p , значительно превышает длину когерентного взаимодействия волн, направленных в различные стороны, π/ξ_p , поэтому амплитуда волн, дифрагирующих назад, как правило, пренебрежимо мала. Соотношение амплитуд волн p -го дифракционного порядка, направленных вперед и назад, может быть найдено интегрированием (2.1.10) с граничными условиями (2.1.13)

$$C_{p,-1}(0) = \int_0^l \frac{dC_{p,1}}{dx} e^{2jk_{px}x} dx = \frac{dC_{p,1}}{dx}(x_1) l \frac{\sin k_{px}l}{k_{px}l} e^{jk_{px}l}. \quad (2.1.14)$$

Здесь x_1 — некоторая точка внутри интервала $(0, l)$.

Из соотношения (2.1.14) следует, что амплитуда $C_{p,-1}$ на выходе из слоя взаимодействия (при $x = 0$) меньше некоторого среднего значения $C_{p,1}$ внутри слоя в $\sin k_{px}l/k_{px}l$ раз. При типичных в экспериментах по дифракции света условиях этот множитель имеет величину порядка 10^{-4} . Это означает, что интенсивность света, дифрагирующего вперед (прошедшего дифракционную решетку) на 8 порядков превышает интенсивность света, дифрагирующего назад (отраженного дифракционной решеткой). Дифракция назад существенна лишь в тех случаях, когда длина взаимодействия l порядка λ , либо при углах θ , близких к 90° , когда $k_x = k \cos \theta$ достаточно мало.

Таким образом, при обычных условиях дифракции можно пренебречь амплитудами всех максимумов, отраженных решеткой. Это означает, что вместо уравнений (2.1.12) можно рассматривать систему уравнений

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{q_p}{2} [C_{p-1}e^{j(\eta_{p-1}x+\Phi)} - C_{p+1}e^{-j(\eta_p x+\Phi)}], \quad (2.1.15)$$

которая получается из (2.1.12) при пренебрежении амплитудами всех максимумов, дифрагирующих назад. (Индекс 1 при амплитудах волн, дифрагирующих вперед, в (2.1.15) опущен).

Интересно отметить, что уравнения (2.1.15) могут быть получены из (2.1.3) непосредственно, если в это уравнение подставить пробное решение вида (2.1.7), но с $C_{p,-1}$ равными нулю. В этом случае для получения (2.1.15) необходимо отбросить вторую производную $\partial^2 C_p / \partial x^2$. Таким образом, отбрасывание второй производной эквивалентно пренебрежению волнами, дифрагирующими назад [44]. Впервые уравнения (2.1.15) были получены в работе [45] методом выделения в области взаимодействия света и звука тонкого слоя. В этом методе с самого начала опускаются идущие назад волны. Несмотря на отсутствие строгого математического доказательства справедливости метода тонкого слоя, получаемые с его помощью уравнения практически точно совпадают с (2.1.15).

Сопоставим (2.1.15) с широко применяющимися уравнениями Рамана-Ната [31].

При выводе уравнения Рамана-Ната в (2.1.3) подставляется пробное решение вида

$$E = E_0 \sum_p C'_p(x) \exp [j(k_{0x}x + k_{0z}z + pKz - \omega_p t)], \quad (2.1.16)$$

где $C'_p(x)$ — амплитуда p -го дифракционного максимума, $\omega_p = \omega_0 + p\Omega$ — его частота, а $k_p = \sqrt{k_{0x}^2 + (k_{0z} + pK)^2}$ — волновое число. Легко видеть, что это волновое число не удовлетворяет соотношению (2.1.6). На рис. 2.2, 6 изображено несколько первых волновых векторов, соответствующих решению (2.1.16). Направления этих волновых векторов определяется углами θ_p , удовлетворяющими соотношению

$$\operatorname{tg} \theta_p = (k_0 \sin \theta_0 + pK) / k_0 \cos \theta_0. \quad (2.1.17)$$

Выражение (2.1.17) совпадает с точным значением угла θ_p , определяемым (2.1.8), при $pK \ll k_0$ и малом угле падения θ_0 . Подставляя (2.1.16) в (2.1.3), при $\Phi = 0$ и пренебрегая второй производной $\partial^2 C'_p / \partial x^2$, получим уравнение Рамана-Ната

$$\frac{dC'_p}{dx} = \frac{k_0^2 \Delta n}{2k_{0x} n} (C'_{p-1} - C'_{p+1}) - j \frac{2k_{0z} pK + p^2 K^2}{2k_{0x}} C'_p. \quad (2.1.18)$$

В отличие от (2.1.15), в уравнениях Рамана-Ната производная от амплитуды p -го максимума зависит не только от амплитуд соседних максимумов C'_{p-1} и C'_{p+1} , но и от амплитуды самого p -го максимума C'_p . Это связано с тем, что C'_p не является амплитудой собственной волны в данной среде. Точное уравнение для C'_p может быть получено из (2.1.15) при $\Phi = 0$ заменой переменных

$$C_p(x) = C'_p(x) \exp(j\alpha_p x), \quad (2.1.19)$$

где $\alpha_p = k_{0x} - k_{px}$.

Подставляя (2.1.19) в (2.1.15), получим для C'_p следующее уравнение:

$$\frac{dC'_p}{dx} = \frac{k_p^2 \Delta n}{2k_{px} n} (C'_{p-1} - C'_{p+1}) - j(k_{0x} - k_{px}) C'_p. \quad (2.1.20)$$

При малых θ_0 и $k_0 \gg pK$ уравнение (2.1.20) переходит в (2.1.18). Из (2.1.19) видно, что C'_p отличается от C_p фазовым множителем $\exp(j\alpha_p x)$, различным для разных дифракционных порядков. При отыскании интенсивности света, рассеянного в p -тый дифракционный максимум, имеет место равенство $C_p C_p^* = C'_p C'^*_p$, где C_p^* означает величину, комплексно сопряженную C_p , поэтому в ряде задач использование уравнений (2.1.15) и (2.1.18) в области его применимости совершенно эквивалентно. Однако в тех случаях, когда угол падения света θ_0 может быть не мал или угол дифракции достаточно велик, использование уравнений Рамана-Ната может привести к существенным ошибкам.

Введенный в данном параграфе параметр q (2.1.12) связан с мощностью бегущей акустической волны P_a . Плотность акустической мощности P_a/lb выражается через квадрат деформации γ :

$$P_a/lb = \frac{1}{2} \rho v^3 \gamma^2. \quad (2.1.21)$$

Здесь b — высота акустического столба; ρ — плотность среды. С величиной деформации связано изменение показателя преломления $\Delta n = \frac{1}{2} n^3 p_\gamma \gamma$. Из (2.1.21)

и (2.1.12) получим связь параметра q и мощности бегущей акустической волны в изотропной среде

$$q = \frac{\pi}{\lambda \cos \theta} \sqrt{\frac{n^6 p_s^2}{\rho v^3} \frac{P_a}{lb}} = \frac{\pi}{\lambda \cos \theta} \sqrt{\frac{M P_a}{lb}}. \quad (2.1.22)$$

Величина M , равная $n^6 p_s^2 / \rho v^3$, характеризует эффективность используемого материала и называется акустооптическим качеством материала.

2.2 Дифракция Рамана-Ната и дифракция Брэгга

Рассмотрим решения системы уравнений (2.1.15) в двух предельных случаях: малых и больших длин области взаимодействия света и звука. Будем кроме того считать, что длина волны ультразвука много больше длины волны света в среде

$$k_0 \gg K. \quad (2.2.1)$$

В этом случае углы дифракции достаточно малы и изменением длины волны света при дифракции можно пренебречь. Тогда

$$\begin{aligned} q_p &= k_p^2 \Delta n / k_{px} n \approx 2\pi \Delta n / \lambda \cos \theta_0 = q; \\ \eta_p &= k_{px} - k_{p+1,x} \approx K \operatorname{tg} \theta_0 + \left(p + \frac{1}{2}\right) K^2 / k_0 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Равенствами (2.2.2) можно пользоваться при не слишком больших углах падения света и номерах дифракционных максимумов p .

Если условия применимости (2.2.2) выполнены и, кроме того, длина области взаимодействия света и звука l настолько мала, что

$$\eta_p l \ll 1 \quad (2.2.3)$$

для любого p , то уравнения (2.1.15) при $\Phi = 0$ принимают вид:

$$2 \frac{dC_p}{dx} = q(C_{p-1} - C_{p+1}). \quad (2.2.4)$$

Это соотношение является стандартным рекуррентным соотношением, связывающим между собой функции Бесселя $\mathcal{J}_p(qx)$ (см., например [46]). Решение системы уравнений (2.2.4) имеет, таким образом, вид

$$C_p(x) = A \mathcal{J}_p(qx). \quad (2.2.5)$$

Учитывая граничные условия (2.1.13), получим значение $A = 1$. В соответствии с (2.2.5) распределение интенсивности света по дифракционным максимумам описывается соотношениями:

$$I_p / I_i = \mathcal{J}_p^2(qx), \quad (2.2.6)$$

где I_p — интенсивность света в p -том дифракционном максимуме, I_i — интенсивность падающего света. Графики зависимости интенсивности света в нулевом, первом и втором максимумах от ql приведены на рис. 2.3.

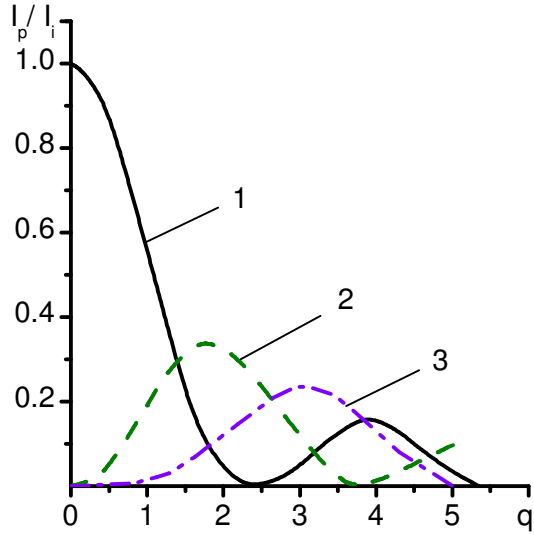


Рис. 2.3. Зависимость интенсивности света в дифракционных максимумах от ql при дифракции Рамана-Ната:
1 — нулевой максимум; 2 — первый максимум; 3 — второй максимум

Впервые выражение (2.2.6) было получено Раманом и Натом в [31]. Поэтому режим дифракции света на ультразвуке, при котором выполняются равенства (2.2.5), носит название дифракции Рамана-Ната. Для такой дифракции характерно наличие значительного числа дифракционных максимумов, симметрично расположенных относительно угла падения света θ_0 . Интенсивности света в симметричных дифракционных максимумах равны

$$I_p(x) = I_{-p}(x), \quad \text{так как} \quad \mathcal{J}_p(qx) = (-1)^p \mathcal{J}_{-p}(qx). \quad (2.2.7)$$

Условие (2.2.3) не является необходимым для получения бесселевского распределения интенсивности по дифракционным порядкам. Необходимо лишь иметь возможность пренебречь зависимостью $\eta_p l$ от p . В соответствии с (2.2.2) такое пренебрежение справедливо, если

$$pQ = pK^2 l / 2\pi k_0 \ll 1. \quad (2.2.8)$$

Величина Q [47] называется волновым параметром задачи дифракции света на ультразвуке и определяет различные режимы дифракции. При достаточно малом Q уравнения (2.1.15) принимают вид:

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{q}{2} \{C_{p-1} \exp[j(\eta x + \Phi)] - C_{p+1} \exp[-j(\eta x + \Phi)]\}, \quad (2.2.9)$$

где $\eta = K \operatorname{tg} \theta_0$.

Для решения системы уравнений (2.2.9) удобно ввести функцию $C(\theta, x)$, связанную с амплитудами дифракционных максимумов $C_p(x)$ соотношением [48]:

$$C(\theta, x) = \sum_p C_p(x) \exp(jp\theta). \quad (2.2.10)$$

Из (2.2.10) следует, что амплитуды дифракционных максимумов являются коэффициентами разложения $C(\theta, x)$ в ряд Фурье по переменной θ , поэтому

$$C_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(\theta, x) \exp(-jp\theta) d\theta. \quad (2.2.11)$$

Подставляя (2.2.11) в (2.2.9), получим уравнение для $C(\theta, x)$:

$$\frac{dC}{dx} = jqC \sin(\eta x + \Phi + \theta). \quad (2.2.12)$$

Уравнение (2.2.12) должно быть проинтегрировано при граничном условии, вытекающем из (2.1.13), $C(\theta, 0) = 1$. Производя интегрирование (2.2.12) по x от нуля до l , получим

$$C(\theta, l) = \exp[j\nu \sin(\theta + \Phi + \eta l/2)], \quad (2.2.13)$$

где

$$\nu = \frac{2q}{\eta} \sin \frac{\eta l}{2} = ql \operatorname{sinc} \frac{\eta l}{2\pi}.$$

Здесь функция $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$. Подставляя (2.2.13) в (2.2.11), получим следующее выражение для амплитуд дифракционных максимумов $C_p(l)$.

$$C_p(l) = \mathcal{J}_p(ql \operatorname{sinc} \eta l/2\pi) \exp \left[jp \left(\frac{1}{2} \eta l + \Phi \right) \right]. \quad (2.2.14)$$

Решение (2.2.14) при $\eta l \ll \pi$ переходит в (2.2.5). Из (2.2.14) следует, что при $\eta \neq 0$ максимальное значение аргумента функций Бесселя не может превышать $2q/\eta$. Начальная фаза акустической волны Φ не сказывается на амплитуде дифракционных максимумов, но влияет на их фазу.

Полученное выше распределение энергии по дифракционным максимумам справедливо до тех пор, пока выполняется (2.2.8). Ясно, что при достаточно больших p это неравенство нарушается. Уже при $p \approx 1/Q$ амплитуда p -го дифракционного максимума существенно меньше $\mathcal{J}_p(\nu)$. Таким образом, для конечного l лишь амплитуды нескольких первых дифракционных максимумов пропорциональны функциям Бесселя и число таких максимумов тем меньше, чем больше Q . По мере уменьшения l решение Рамана-Ната становится справедливым для все большего количества дифракционных максимумов, однако при $l \rightarrow 0$ в соответствии с (2.1.14) необходимо учесть дифракционные максимумы, отраженные акустической волной назад. Такой учет нарушит бесселевское распределение амплитуд дифракционных максимумов.

Другим хорошо исследованным предельным случаем дифракции света на ультразвуке является дифракция Брэгга. Этот режим наблюдается при достаточно большой толщине области взаимодействия l , когда $Q \gg 1$. При произвольном угле падения света θ_0 все $\eta_p l$ велики по сравнению с π и эффективной дифракции света вообще не происходит. Однако при определенных θ_0 , близких к так называемому углу Брэгга, величина $\eta_0 l$ или $\eta_{-1} l$ мала и происходит эффективная дифракция в $+1$ -ый или -1 -ый дифракционные порядки.

Например, при $\sin \theta_0 \approx -K/2k_0$, величина $\eta_0 l$ невелика и в соответствии с (2.1.15) происходит эффективное взаимодействие нулевого и первого дифракционных максимумов. Пренебрегая в (2.1.15) всеми C_p , кроме C_0 и C_1 , получаем такую систему уравнений, характерную для дифракции Брэгга:

$$\frac{dC_0}{dx} = -\frac{q_1}{2} C_1 \exp[-j(\eta_0 x + \Phi)]; \quad \frac{dC_1}{dx} = \frac{q_0}{2} C_0 \exp[j(\eta_0 x + \Phi)]. \quad (2.2.15)$$

Совершенно аналогичный вид имеют уравнения, описывающие дифракцию Брэгга в -1 -ый максимум при $\sin \theta_0 \approx K/2k_0$.

Система уравнений (2.2.15) легко интегрируется и дает

$$C_0(x) = \left(\cos \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_0 q_1} x}{2} + j \frac{\eta_0 x}{2} \operatorname{sinc} \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_0 q_1} x}{2\pi} \right) e^{-j\eta_0 x/2}; \quad (2.2.16)$$

$$C_1(x) = \frac{q_0 x}{2} \operatorname{sinc} \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_0 q_1} x}{2\pi} e^{j(\eta_0 x/2 + \Phi)}. \quad (2.2.17)$$

Плотности потоков энергии, переносимых первым и нулевым дифракционными максимумами через сечение x , равны:

$$\frac{I_0(x)}{I_0(0)} = C_0 C_0^* = \cos^2 \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_1 q_0} x}{2} + \frac{\eta_0^2 x^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_1 q_0} x}{2\pi}; \quad (2.2.18)$$

$$\frac{I_1(x)}{I_0(0)} = \frac{C_1 C_1^* \cos \theta_1}{\cos \theta_0} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_0} \frac{q_0^2 x^2}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\sqrt{\eta_0^2 + q_1 q_0} x}{2\pi}, \quad (2.2.19)$$

где $I_0(0) = I_i$ — поток энергии падающего света.

Следует отметить, что приведенное выше решение задачи о дифракции Брэгга не требовало выполнения условия (2.2.1). Если это условие не выполнено, то в уравнения (2.2.15) вместо приближенных соотношений (2.2.2) подставляются точные значения η_0 , q_0 и q_1 , определенные в § 2.1.

Когда угол падения света θ_0 точно совпадает с углом Брэгга θ_B , где

$$\sin \theta_B = -K/2k_0, \quad (2.2.20)$$

величина η_0 равна нулю и $\theta_1 = -\theta_B$. В этом случае говорят о строгом выполнении условия Брэгга. Пренебрегая изменением частоты света при дифракции, получим для этого случая относительные амплитуды дифракционных максимумов в виде:

$$C_0(x) = \cos \frac{qx}{2}; \quad C_1(x) = \sin \frac{qx}{2} \exp(j\Phi). \quad (2.2.21)$$

Здесь q определяется из (2.2.2) при $\theta_0 = \theta_B$.

На рис. 2.4 приведена зависимость I_1/I_i от ql для нескольких значений $\eta_0 l$. Если ограничиться первым максимумом рассматриваемой функции, то с ростом $\eta_0 l$ уменьшается максимально достижимое значение $I_1(ql)$. Изменение η_0 при заданном угле падения света означает изменение частоты ультразвуковой волны. Параметры большинства акустооптических устройств определяются допустимой полосой изменения частоты акустической волны. Поэтому с помощью (2.2.19) можно оценить предельные возможности многих акустооптических устройств, работающих в режиме Брэгговской дифракции, при заданных

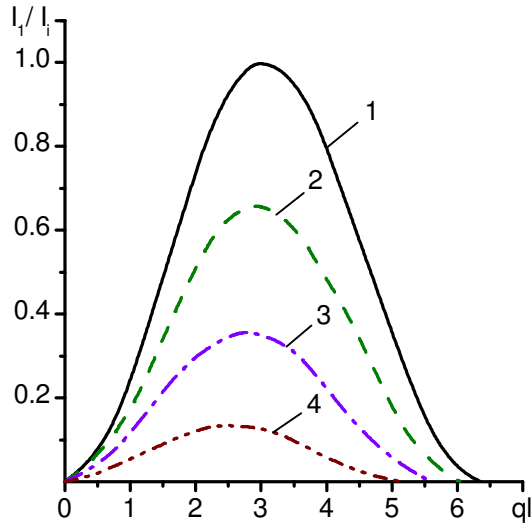


Рис. 2.4. Зависимость I_1/I_i от ql при дифракции Брэгга:

- 1 — $\eta_0 l = 0$; 2 — $\eta_0 l = 2$;
3 — $\eta_0 l = 3$; 4 — $\eta_0 l = 4$

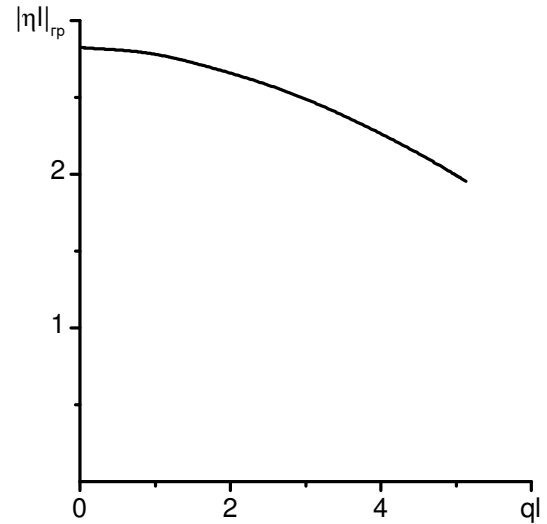


Рис. 2.5. Зависимость $|\eta l|_{гр}$ от ql при дифракции Брэгга

допустимых потерях интенсивности света. Величина $|\eta l|_{гр}$, при которой интенсивность света в первом дифракционном максимуме убывает до половины своего максимального значения, очень слабо зависит от акустической мощности. На [рис. 2.5](#) приведена зависимость $|\eta l|_{гр}$ от ql . Видно, что при $ql < \pi$ величина $|\eta l|_{гр}$ меняется при изменении q не более, чем на 10% от своего максимального значения, достигаемого при малых интенсивностях ультразвука и равного $2,8 \approx 0,8\pi$. Таким образом, полосу акустооптического устройства, работающего в режиме дифракции Брэгга, можно оценивать, ограничившись случаем малых акустических мощностей.

Из равенства (2.2.16) видно, что при дифракции Брэгга амплитуда и фаза проходящей световой волны существенно зависят от интенсивности ультразвука ($q_1 q_0$) и величины рассинхронизма акустооптического взаимодействия η_0 . На [рис. 2.6](#) изображены зависимости интенсивности и фазы проходящей световой волны от интенсивности ультразвука при разных величинах рассинхронизма. При точном выполнении условия Брэгга фаза волны скачком меняется на π при $ql = \pi$. При наличии рассинхронизма появляются широкие области плавного и почти линейного изменения фазы от интенсивности ультразвука. Эти зависимости могут быть использованы для фазовой модуляции света акустической волной [49].

При достаточно тонком исследовании может проявиться интересное явление невзаимности распространения света в поле акустической волны [50]. Это явление связано с тем, что при дифракции Брэгга на бегущей ультразвуковой волне для двух световых потоков, распространяющихся навстречу друг другу, условия Брэгга оказываются выполненными при слегка различающихся углах падения света. Если первый световой поток дифрагирует в +1-ый дифракционный максимум, то второй — в -1-ый. Условие Брэгга для первого светового

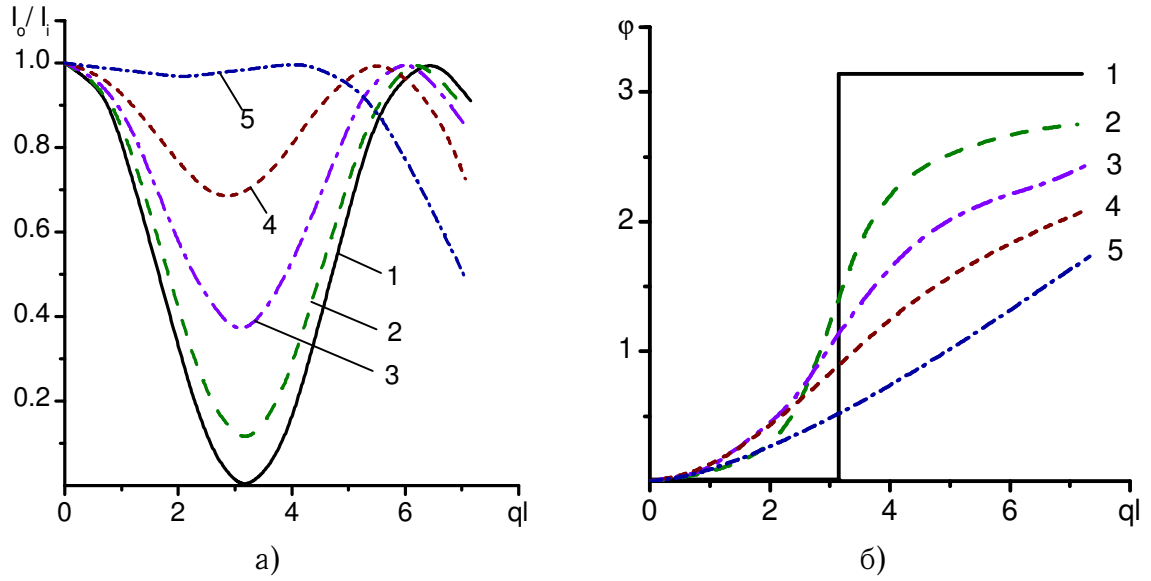


Рис. 2.6. Влияние звукового поля на проходящую световую волну при дифракции Брэгга:
 1 — $\eta_0 l = 0$; 2 — $\eta_0 l = 1$; 3 — $\eta_0 l = 2$; 4 — $\eta_0 l = 3$; 5 — $\eta_0 l = 5$

потока имеет вид $k_{0x} = k_{1x}$, а для второго — $k_{0x} = k_{-1x}$. Пусть условие Брэгга точно выполнено для первого светового потока. Тогда для второго потока коэффициент рассинхронизма $\eta_{-1} = k_{-1x} - k_{1x} = -\Omega k / \omega \cos \theta$. Эта величина невелика, так как $\Omega \ll \omega$, но при достаточной длине области взаимодействия l и не слишком малой частоте ультразвука Ω величина $\eta_{-1}l$ может стать сравнимой с единицей.

2.3 Дифракция света в области, промежуточной между режимами Рамана-Ната и Брэгга

Предельные случаи малых и больших длин области взаимодействия света и звука могут быть проанализированы до конца и соответствуют режимам дифракции Рамана-Ната и Брэгга. Значительно более сложным является промежуточный случай умеренных длин области взаимодействия, при котором уже нельзя ограничиться рассмотрением двух взаимодействующих порядков, но в то же время распределение энергии по порядкам далеко от бесселевского. Такой режим довольно широко используется в практике создания акустооптических устройств и поэтому необходимо рассмотреть его основные особенности.

Обычно в промежуточном режиме можно ограничиться не слишком большим числом взаимодействующих дифракционных максимумов. Пусть таких максимумов будет $N + 1$. Будем считать, что номер дифракционного порядка меняется от $p = a$ до $p = a + N$. Будем искать решение системы $N + 1$ уравнения вида (2.1.15) в форме

$$C_p(x) = B_p \exp(j\beta_p x). \quad (2.3.1)$$

Подставляя это решение в (2.1.15) и полагая $\beta_{p+1} = \beta_p + \eta_p$, получим систе-

му, состоящую из $N + 1$ линейного алгебраического уравнения, связывающую коэффициенты B_p .

$$q_p B_{p-1} - 2j\beta_p B_p - q_p B_{p+1} = 0. \quad (2.3.2)$$

Такая система уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если ее определитель равен нулю.

Равенство нулю определителя является уравнением $N + 1$ степени относительно β_a . Оно дает возможность найти $N + 1$ значение β_{ai} , а значит и все β_{pi} . Каждому значению β_{pi} соответствует свой коэффициент B_{pi} . Таким образом, решение (2.3.1) принимает вид:

$$C_p(x) = \sum_{i=0}^N B_{pi} \exp(j\beta_{pi}x). \quad (2.3.3)$$

Исследуем этим методом режим дифракции близкий к режиму Брэгга.

Пусть свет падает на область взаимодействия точно под углом Брэгга: $\sin \theta_0 = \sin \theta_B = -K/2k_0$. Коэффициенты η_p в приближении (2.2.1) в этом случае равны: $\eta_p = pK^2/k_0$.

Ограничимся учетом четырех дифракционных максимумов C_{-1} , C_0 , C_1 и C_2 . Полученное таким образом решение имеет более широкую область применимости, чем решение (2.2.16), (2.2.17). С его помощью можно оценить пределы изменения параметров, при которых происходит дифракция Брэгга.

Применяя изложенную выше методику для $a = -1$ и $N = 3$, получаем с помощью (2.3.2) и (2.3.3) следующие выражения для амплитуд дифракционных максимумов:

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \left[\frac{4(ad^2 - b^3)}{q^2 d} \sin dx + 4j \frac{\eta_1 b}{q^2} \cos dx \right] e^{jbx} + \\ &+ \frac{4}{q^2} \left(\frac{bc^2 - a^3}{c} \sin cx + j\eta_1 a \cos cx \right) e^{-jax} - 2j \frac{\eta_1}{q}; \\ C_0 &= \frac{2}{q} \left(b \cos cx + j \frac{a^2}{c} \sin cx \right) e^{jbx} + \frac{2}{q} \left(a \cos dx - j \frac{b^2}{d} \sin dx \right) e^{-jax}; \\ C_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{c} \sin cx - j \cos cx \right) e^{jbx} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{d} \sin dx + j \cos dx \right) e^{-jax}; \\ C_2 &= 4jq \left(\frac{e^{-jax}}{c} \sin cx - \frac{e^{jbx}}{d} \sin dx \right), \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} a &= (2\eta_1 + q)/4; \\ b &= (q - 2\eta_1)/4; \\ c &= \sqrt{(2\eta_1 + q)^2 + 4q^2}/4; \\ d &= \sqrt{(2\eta_1 - q)^2 + 4q^2}/4. \end{aligned}$$

С помощью соотношений (2.3.4) может быть рассчитана интенсивность света, дифрагировавшего в первый максимум при умеренной толщине области взаимодействия l , когда условие дифракции Брэгга не выполнено. Интенсивность

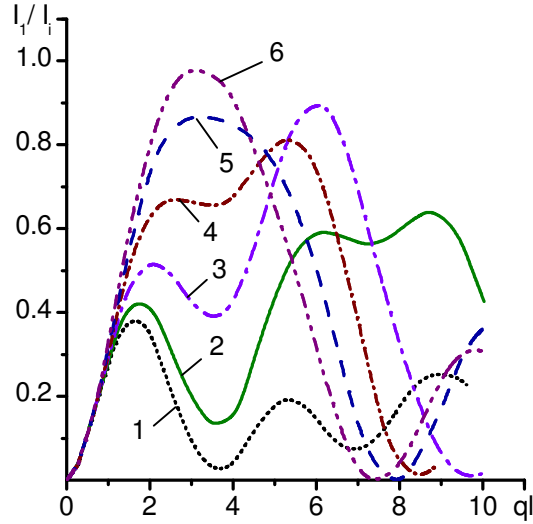


Рис. 2.7. Зависимость I_1/I_i от ql при дифракции в промежуточной области:
 $\theta_i = \theta_B$; 1 — $Q = 0,16$; 2 — $Q = 0,32$; 3 — $Q = 0,48$;
 4 — $Q = 0,64$; 5 — $Q = 0,8$; 6 — $Q = 0,96$

света в первом максимуме в этом случае равна:

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_i} = C_1 C_1^* = & \frac{1}{4} \cos^2 cl + \frac{a^2}{4c^2} \sin^2 cl + \frac{1}{4} \cos^2 dl + \frac{b^2}{4d^2} \sin^2 dl - \\ & - \frac{1}{2} \cos \frac{ql}{2} \cos cl \cos dl + \frac{b}{2d} \sin \frac{ql}{2} \cos cl \sin dl + \\ & + \frac{ab}{2cd} \cos \frac{ql}{2} \sin cl \sin dl - \frac{a}{2c} \sin \frac{ql}{2} \sin cl \cos dl. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Выражение (2.3.5) дает возможность количественно оценить предел применимости приближения Брэгга. Если в (2.3.5) пренебречь величинами порядка $(ql)^3/32\pi^3Q^3$ по сравнению с единицей, то

$$C_1 C_1^* = [1 - (ql)^2/8\pi^2Q^2] \sin^2 ql/2. \quad (2.3.6)$$

Соотношение (2.3.6) справедливо с точностью 10%, если $Q \geq 1$, а $ql \leq 3$. Из (2.3.6) видно, что интенсивность света в первом дифракционном максимуме совпадает со значением, полученным в приближении дифракции Брэгга (2.2.21), если

$$(ql)^2/8\pi Q^2 = q^2/2\eta_1^2 = (\Delta n)^2 n^2 \Lambda^4/2\lambda^4 \leq 1. \quad (2.3.7)$$

Из (2.3.7) следует, что при $Q > 1,5$ интенсивность света в первом дифракционном максимуме отличается от рассчитанной по (2.2.21) менее чем на 10%, если $ql \leq \pi$.

Было проведено [51] точное численное решение уравнений (2.1.15) в приближении малых углов дифракции, когда выполняются условия (2.2.2) для области, промежуточной между дифракцией Рамана-Ната и дифракцией Брэгга. На рис. 2.7 приведена зависимость относительной интенсивности света в первом максимуме от величины ql при различных Q и угле падения света, совпадающем с углом Брэгга. Анализ точного решения показывает, что

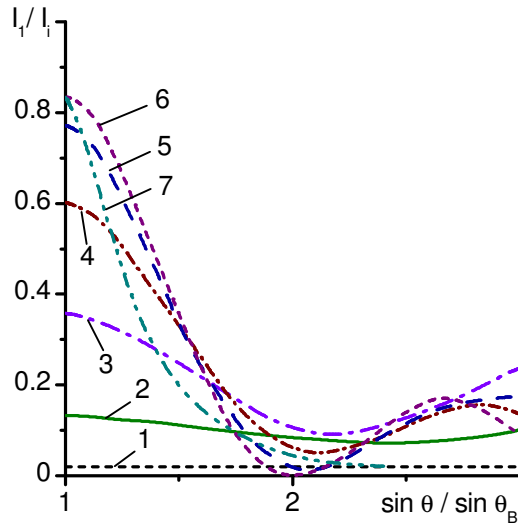


Рис. 2.8. Зависимость I_1/I_i от угла падения света в промежуточной области:
 $ql = 4$; 1 — $Q = 0,16$;
 2 — $Q = 0,32$; 3 — $Q = 0,48$;
 4 — $Q = 0,64$; 5 — $Q = 0,8$;
 6 — $Q = 0,96$;
 7 — зависимость I_1/I_i от f

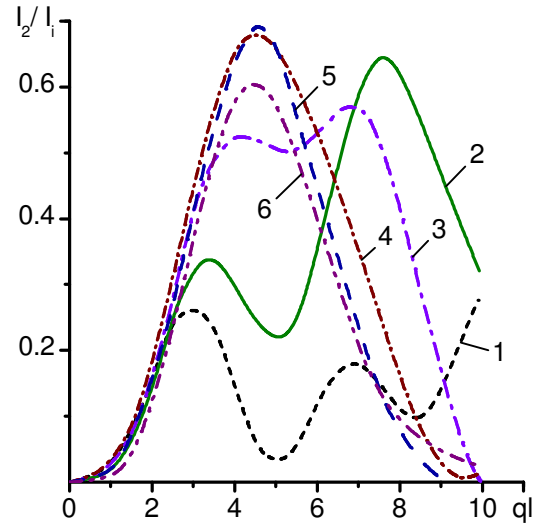


Рис. 2.9. Зависимость I_2/I_i от ql в области промежуточных Q :
 $\theta_i = 2\theta_B$; 1 — $Q = 0,16$;
 2 — $Q = 0,32$; 3 — $Q = 0,48$;
 4 — $Q = 0,64$; 5 — $Q = 0,8$;
 6 — $Q = 0,96$

при $ql < 1,5$ эффективность дифракции в первый максимум не зависит от Q , а при $1,5 < ql < 4,5$ монотонно увеличивается с ростом Q . При $Q > 1,5$ может считаться достигнутым брэгговский режим дифракции. Интересно отметить, что при $Q = 0,64$ эффективность дифракции составляет $\sim 60\%$ при изменении ql в широких пределах от 2,5 до 6,5.

На рис. 2.8 приведены результаты численного расчета зависимости относительной интенсивности в первом дифракционном максимуме от угла падения света для различных Q и $ql = 4$. С помощью этого графика можно оценить угловую избирательность дифракции в области, промежуточной между дифракцией Рамана-Ната и Брэгга. Угловая зависимость тесно связана с зависимостью интенсивности света от частоты акустической волны, поскольку $\sin \theta_B = \pi f / k_0 v$, где f — частота акустической волны, а v — ее скорость в среде. Если учесть еще и квадратичную зависимость Q от f , то получится частотная зависимость интенсивности света в первом дифракционном максимуме, изображенная на рис. 2.8 кривой 7.

На рис. 2.9 изображена зависимость интенсивности света во втором дифракционном максимуме от ql в области промежуточных Q . При $0,65 < Q < 0,8$ эффективность дифракции во второй максимум достигает более 65% при $4 < ql < 5$. Эти кривые рассчитаны для случая угла падения света, равного удвоенному углу Брэгга $\sin \theta_i = -K/k_0$. Угловая зависимость интенсивности второго дифракционного максимума приведена на рис. 2.10 для случая $ql = 5$. Сравнение рис. 2.10 и рис. 2.8, а также рис. 2.9 и рис. 2.7 показывает, что

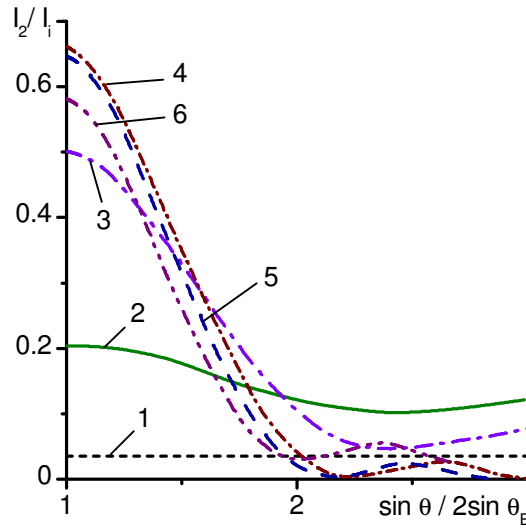


Рис. 2.10. Зависимость I_2/I_i от $\theta_i/2\theta_B$ в области промежуточных Q :
 $ql = 5$; 1 — $Q = 0,16$; 2 — $Q = 0,32$; 3 — $Q = 0,48$; 4 — $Q = 0,64$;
 5 — $Q = 0,8$; 6 — $Q = 0,96$

использование второго дифракционного максимума для целей прикладной акустооптики может быть достаточно эффективно, при значениях Q несколько меньше единицы, если не важна линейность зависимости I_d от ql .

2.4 Методы общего решения уравнений дифракции

Общее решение системы уравнений (2.1.15), описывающей $M + N + 1$ дифракционный максимум ($M \geq p \geq -N$), может быть получено введением $(M + N + 1)$ -мерного вектора $\vec{C}(x)$, компонентами которого являются амплитуды дифракционных максимумов: $\vec{C} = (C_{-N}, C_{-N+1}, \dots, C_0, \dots, C_M)$, и оператора $\mathbf{H}(x)$, который можно представить квадратной матрицей ранга $M + N + 1$.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & b_{-N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{-N+1} & 0 & b_{-N+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{-N+2} & 0 & b_{-N+2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_M & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.1)$$

где

$$a_p = (q_p/2) \exp[j(\eta_{p-1}x + \Phi)];$$

$$b_p = -(q_p/2) \exp[-j(\eta_p x + \Phi)].$$

С использованием этих обозначений система уравнений (2.1.15) может быть

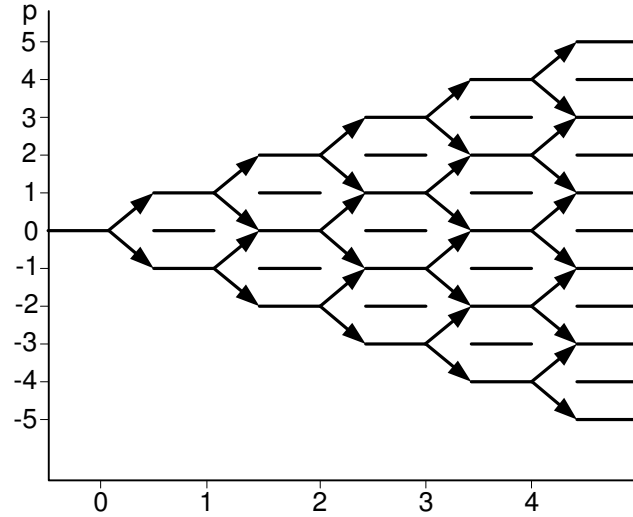


Рис. 2.11. Диаграмма образования дифракционных максимумов при дифракции света в изотропной среде

записана в виде одного операторного уравнения:

$$\frac{d\vec{C}}{dx} = \mathbf{H}\vec{C}. \quad (2.4.2)$$

Интегрируя левую и правую части (2.4.2) по x в пределах от нуля до l , получим

$$\vec{C}(l) = \vec{C}(0) + \int_0^l \mathbf{H}(x)\vec{C}(x) dx. \quad (2.4.3)$$

В соответствии с определением вектора \vec{C} и граничными условиями (2.1.13)

$$\vec{C}(0) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Решение интегрального уравнения (2.4.3) может быть найдено последовательными приближениями

$$\vec{C}^{(i)}(l) = \vec{C}(0) + \int_0^l \mathbf{H}(x)\vec{C}^{(i-1)}(x) dx, \quad (2.4.4)$$

где в качестве нулевого приближения используется $\vec{C}^{(0)} = \vec{C}(0)$. В нулевом приближении не равной нулю является только амплитуда нулевого максимума. В каждом последующем приближении в соответствии с видом (2.4.1) появляются два дополнительных дифракционных максимума. Таким образом, p -тый дифракционный максимум появляется только в p -м приближении решения (2.4.4). На рис. 2.11 приведена диаграмма, показывающая процесс образования дифракционных максимумов на первых пяти шагах метода последовательных приближений. Анализируя этот процесс последовательных приближений, легко видеть, что амплитуда любого дифракционного максимума может быть представлена в виде ряда

$$C_p(l) = \sum_{i=0}^{\infty} C_p^{(p+2i)}, \quad (2.4.5)$$

причем i -ый член этого ряда пропорционален $(\Delta n/n)^{p+2i}$.

Первый член ряда (2.4.5) представляет собой p -кратный интеграл вида

$$C_p^{(p)}(l) = \int_0^l a_p(x_p) \int_0^{x_p} a_{p-1}(x_{p-1}) \dots \int_0^{x_3} a_2(x_2) \int_0^{x_2} a_1(x_1) dx_1 \dots dx_p. \quad (2.4.6)$$

Он описывает в соответствии с рис. 2.11 кратчайший переход от нулевого максимума к p -му. Например, кратчайшим путем между нулевым и четвертым максимумами является переход $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Второй член ряда (2.4.5) описывает все переходы из нулевого в p -тый максимум с однократным рассеянием в направлении, обратном направлению кратчайшего пути. Таким переходом, например, является переход $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, в котором во втором максимуме (переход $2 \rightarrow 1$) волна испытала рассеяние в обратном направлении. В общем виде второй член ряда (2.4.5) может быть записан так:

$$C_p^{(p+2)}(l) = \sum_{m=0}^{p+1} \int_0^l a_p(x_{p+2}) \dots \int_0^{x_{m+3}} a_m(x_{m+2}) \int_0^{x_{m+2}} b_{m-1}(x_{m+1}) \dots \times \\ \times \int_0^{x_2} a_1(x_1) dx_1 \dots dx_{p+2}. \quad (2.4.7)$$

Третий член ряда (2.4.5) описывает все переходы из нулевого в p -тый максимум с двумя рассеяниями, обратными направлению кратчайшего пути и т.д. Каждый из интегралов, входящих в выражение $C_p^{(p+2i)}$, берется аналитически, однако из-за большого количества многократных интегралов общее выражение оказывается весьма громоздким.

В предельных случаях дифракции Рамана-Ната и Брэгга ряд (2.4.5) может быть просуммирован аналитически. Так в приближении Рамана-Ната все $\eta_p x$ считаются малыми по сравнению с единицей. Если кроме того все q_p одинаковы и равны q , то коэффициенты a_p , входящие в (2.4.1), все равны $q/2$, а коэффициенты b_p равны $-q/2$. В этом случае входящие в (2.4.5) многократные интегралы легко берутся и дают $C_p^{(p)} = (ql/2)^p/p!$, $C_p^{(p+2)}(l) = -(ql/2)^{p+2}/(p+1)!$ и так далее. В результате ряд (2.4.5) принимает вид

$$C_p(l) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!(p+i)!} \left(\frac{ql}{2} \right)^{p+2i} = \mathcal{J}_p(ql). \quad (2.4.8)$$

В предельном случае дифракции Брэгга из-за большой длины области взаимодействия света и акустической волны оказываются запрещенными переходы между всеми дифракционными максимумами, кроме нулевого и первого. При точном выполнении условия Брэгга $\eta_0 = 0$ и оператор \mathbf{H} в (2.4.1) принимает вид:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -q/2 \\ q/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.9)$$

Ряды (2.4.5) в этом случае также легко суммируются:

$$C_1(l) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+1)!} \left(\frac{ql}{2} \right)^{2i+1} = \sin \frac{ql}{2}; \quad (2.4.10)$$

$$C_0(l) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2i!} \left(\frac{ql}{2} \right)^{2i} = \cos \frac{ql}{2}. \quad (2.4.11)$$

Сравнивая (2.4.10) и (2.4.8) при $p = 1$, можно проанализировать [52] особенности образования первого дифракционного максимума при различных режимах дифракции. Коэффициенты при $ql/2$ в первой степени в рядах (2.4.8) и (2.4.10) совпадают, т. к. однократный переход из нулевого максимума в первый происходит одинаково независимо от режима дифракции. Коэффициент при $ql/2$ в третьей степени в выражении (2.4.8) в три раза больше соответствующего коэффициента ряда (2.4.10). Это связано с тем, что в режиме дифракции Рамана-Ната возможны 3 различных трехступенчатых перехода из нулевого максимума в первый ($0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$; $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ и $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$), а в режиме дифракции Брэгга разрешен только один трехступенчатый переход ($0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$) (см. рис. 2.11). Аналогичным образом в режиме Рамана-Ната возможны 10 пятиступенчатых переходов из нулевого максимума в первый, а в режиме Брэгга — только один. Поэтому коэффициенты при $ql/2$ в пятой степени у рядов (2.4.8) и (2.4.10) отличаются в 10 раз. Следующие коэффициенты отличаются в 35 раз и т.д. Приведенные соображения показывают, что диаграмма переходов, изображенная на рис. 2.11 позволяет получать не только качественные, но и некоторые количественные сведения о процессе дифракции света на ультразвуке. Дифракция Рамана-Ната соответствует равной вероятности всех переходов, приведенных на рис. 2.11. Дифракция Брэгга соответствует переходам с той же вероятностью, но только между уровнями 0 и 1. Остальные переходы считаются полностью запрещенными. В промежуточном режиме дифракции вероятности переходов оказываются различными и меньшими, чем вероятности переходов в режиме дифракции Рамана-Ната. Таким образом, при произвольном режиме дифракции амплитуда света в первом дифракционном максимуме может быть записана в виде

$$C_1(l) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{ql}{2} \right)^{2i+1} C_1^{(2i+1)}(Q). \quad (2.4.12)$$

Если угол падения света совпадает с углом Брэгга, то коэффициенты ряда (2.4.12) должны быть заключены между соответствующими коэффициентами рядов (2.4.8) и (2.4.10). Величины $C_1^{(2i+1)}$ зависят от волнового параметра Q : Коэффициент $C_1^{(1)}$ всегда равен единице. Зависимости коэффициентов $C_1^{(3)}$ и $C_1^{(5)}$ от Q приведены на рис. 2.12. Как и следовало ожидать, основное изменение коэффициентов $C_1^{(3)}$ и $C_1^{(5)}$ происходит при $0,16 < Q < 1,6$, а предельные значения $C_1^{(3)}$ и $C_1^{(5)}$ при $Q < 0,16$ равны $1/2$ и $1/12$ соответственно, а при $Q > 1,6$ — $C_1^{(3)} = 1/6$, $C_1^{(5)} = 1/120$. Знание этих коэффициентов при различных Q позволяет оценить роль нелинейности в конкретных акустооптических задачах.

Число членов ряда (2.4.12), которое необходимо учитывать для правильного описания амплитуды первого дифракционного максимума, зависит от величины ql . При $ql \leq 0,5$ достаточно учесть первый член ряда, при $ql \leq 1,5$ точное описание C_1 дают два члена ряда, при $ql \leq 2$ достаточно ограничиться тремя членами ряда (2.4.12). Четыре члена этого ряда достаточны при описании C_1 вплоть до $ql = 3$, а пять членов хорошо описывают C_1 до $ql = 4$.

При малой эффективности дифракции можно воспользоваться первым приближением соотношения (2.4.4). В этом случае амплитуда нулевого дифракци-

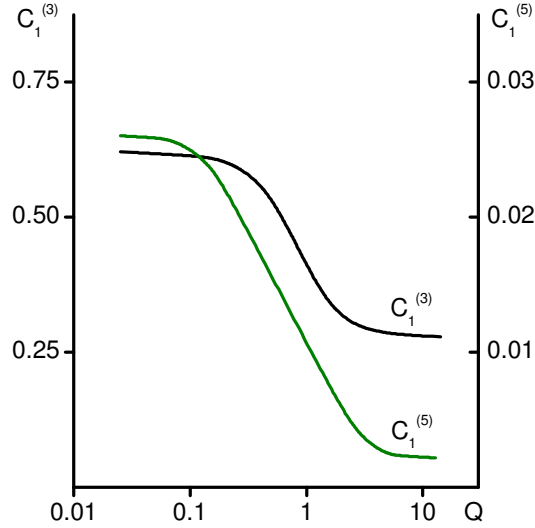


Рис. 2.12. Зависимость $C_1^{(3)}$ и $C_1^{(5)}$ от Q при $\theta_i = \theta_B$

онного максимума полагается равной единице, а амплитуда первого максимума определяется при однократном интегрировании (2.4.4) и равна

$$C_1(l) = \frac{ql}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{\eta l}{2\pi} \right) \exp \left[j \left(\frac{\eta l}{2} + \Phi \right) \right]. \quad (2.4.13)$$

Интенсивность света в первом дифракционном максимуме выражается соотношением

$$I_1/I_i = (q^2 l^2 / 4) \operatorname{sinc}^2 (\eta l / 2\pi). \quad (2.4.14)$$

Пределы применимости этой параболической зависимости I_1/I_i от ql могут быть определены с помощью рис. 2.7, из которого видно, что с ростом Q пределы применимости (2.4.14) увеличиваются от $ql \leq 1,1$ для дифракции Рамана-Ната до $ql \leq 1,6$ для дифракции Брэгга. При этом эффективность дифракции в первый максимум достигает 30–60%.

При достаточно малой интенсивности акустической волны соотношение (2.4.13) выполняется точно. Для дифракции, описываемой этим соотношением, характерна линейная зависимость амплитуды дифрагированного света от амплитуды акустической волны. Эта линейность используется в целом ряде акустооптических приборов. Кроме того, линейная зависимость C_1 от q сильно облегчает анализ работы акустооптических устройств, поэтому даже в устройствах, использующих нелинейный режим, расчет характеристик обычно проводится в линейном режиме, а затем с помощью последующих приближений ряда (2.4.4) уточняются полученные результаты.

2.5 Дифракция света на двух бегущих акустических волнах и на стоячей волне

Самостоятельный интерес представляет вопрос о дифракции света на нескольких бегущих волнах, имеющих общую область взаимодействия со светом. Пусть

эта область по-прежнему расположена между плоскостями $x = 0$ и $x = l$. Рассмотрим две ультразвуковые волны с частотами Ω_1 и Ω_2 , имеющие волновые векторы \vec{K}_1 и \vec{K}_2 , перпендикулярные оси x .

Показатель преломления в области взаимодействия принимает вид

$$n(\vec{r}, t) = n + \Delta n_1 \sin(\vec{K}_1 \vec{r} - \Omega_1 t) + \Delta n_2 \sin(\vec{K}_2 \vec{r} - \Omega_2 t), \quad (2.5.1)$$

где Δn_i — изменение показателя преломления, зависящее от интенсивности i -той акустической волны.

Падающая на область взаимодействия плоская световая волна амплитуды E_0 распадается в области взаимодействия на сумму дифракционных максимумов с различными частотами ω_{pm} и волновыми векторами \vec{k}_{pm} .

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \sum_{p,m} C_{pm}(x) \exp \left[j \left(\vec{k}_{pm} \vec{r} - \omega_{pm} t \right) \right]. \quad (2.5.2)$$

Для того, чтобы эти волны были собственными волнами среды, должно выполняться соотношение

$$|\vec{k}_{pm}| = \omega_{pm} n / c.$$

Подставляя (2.5.2) и (2.5.1) в волновое уравнение (2.1.3) и отбрасывая вторые производные $d^2 C_{pm} / dx^2$, получим систему дифференциальных уравнений, определяющих изменение относительных амплитуд $C_{pm}(x)$ внутри области взаимодействия:

$$2 \frac{dC_{pm}}{dx} = q_{1pm} [C_{p-1,m} \exp(j\eta_{1,p-1,m}x) - C_{p+1,m} \exp(-j\eta_{1pm}x)] + \\ + q_{2pm} [C_{p,m-1} \exp(j\eta_{2,p,m-1}x) - C_{p,m+1} \exp(-j\eta_{2pm}x)], \quad (2.5.3)$$

где $q_{1pm} = k_{pm}^2 \Delta n_1 / k_{pmx} n$; $q_{2pm} = k_{pm}^2 \Delta n_2 / k_{pmx} n$; k_{pmx} — проекция вектора \vec{k}_{pm} на ось x ; $\eta_{1pm} = k_{pmx} - k_{p+1,mx}$; $\eta_{2pm} = k_{pmx} - k_{p,m+1,x}$.

Поле $E(\vec{r}, t)$ вида (2.5.2) удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям в плоскости $x = 0$, если частоты ω_{pm} и волновые вектора \vec{k}_{pm} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_{pm} + \Omega_1 &= \omega_{p+1,m}; & (k_{pm} + K_1)_{yz} &= (k_{p+1,m})_{yz}; \\ \omega_{pm} + \Omega_2 &= \omega_{p,m+1}; & (k_{pm} + K_2)_{yz} &= (k_{p,m+1})_{yz}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Система уравнений (2.5.3) является естественным обобщением системы уравнений (2.1.15) на случай двух акустических волн. Из нее видно, что перекачка энергии в данный дифракционный максимум происходит из четырех соседних максимумов путем поглощения или излучения фонона с частотой Ω_1 или Ω_2 . В свою очередь уравнения (2.5.3) могут быть просто обобщены на случай любого конечного числа акустических волн, имеющих общую область взаимодействия с оптической волной.

Граничные условия при $x = 0$ для уравнений (2.5.3) имеют вид

$$C_{00}(0) = 1; \quad C_{pm}(0) = 0. \quad (2.5.5)$$

Решение системы уравнений (2.5.3) с граничными условиями (2.5.5) может быть получено методом последовательных приближений, аналогичным описанному в § 2.4. Однако, если длина ультразвуковой ячейки достаточно велика, а угол падения света подобран так, что он равен углу Брэгга для обеих ультразвуковых волн, то из всей совокупности максимумов C_{pm} остаются только три максимума C_{00} , C_{10} и C_{01} , причем $\eta_{100} = \eta_{200} = 0$. В этом приближении уравнения (2.5.3) принимают вид:

$$\begin{aligned} 2(dC_{00}/dx) &= -q_{100}C_{10} - q_{200}C_{01}; \\ 2(dC_{10}/dx) &= q_{110}C_{00}; \\ 2(dC_{01}/dx) &= q_{201}C_{00}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Интегрируя эти уравнения с учетом граничных условий (2.5.5), получим:

$$\begin{aligned} C_{00} &= \cos(\sqrt{q_{100}q_{110} + q_{200}q_{201}}x/2); \\ C_{10} &= (1/2)q_{110}x \operatorname{sinc}(\sqrt{q_{100}q_{110} + q_{200}q_{201}}x/2\pi); \\ C_{01} &= (1/2)q_{201}x \operatorname{sinc}(\sqrt{q_{100}q_{110} + q_{200}q_{201}}x/2\pi). \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Соотношения (2.5.7) показывают, что перекачка энергии из основного максимума в боковые зависит от суммарной интенсивности двух ультразвуковых волн. Амплитуды C_{01} и C_{10} достигают максимума одновременно, причем соотношение интенсивностей двух первых дифракционных максимумов равно q_{100}^2/q_{201}^2 при любой длине области взаимодействия. Впрочем, необходимо помнить, что соотношения (2.5.7) получены при угле падения света, равном углу Брэгга. Если это условие не выполнено, то соотношения (2.5.7) нарушаются.

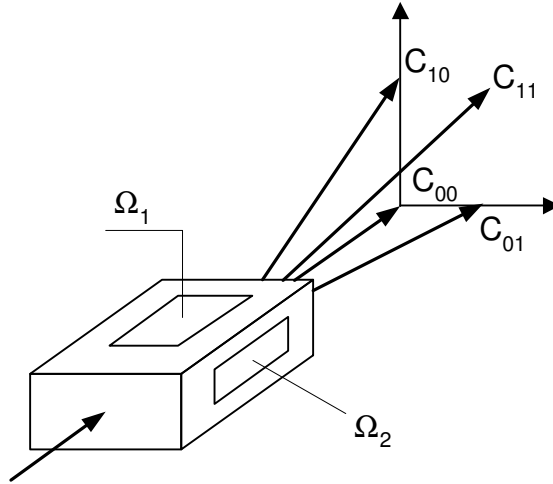


Рис. 2.13. Схема дифракции света на двух ортогональных акустических пучках

Перейдем теперь к рассмотрению задачи, представляющей особый интерес при двумерном сканировании света в одном фотоупругом образце. В этом случае две управляющие акустические волны распространяются под прямым углом друг к другу [53]. В соответствии с соотношениями (2.5.4) изменение частоты Ω_1 приводит к сканированию дифракционных максимумов, для которых $p \neq 0$ в направлении \vec{K}_1 . Изменение частоты Ω_2 приводит к сканированию

максимумов, для которых $m \neq 0$ в направлении \vec{K}_2 . Наличие двух ортогональных управляющих волн позволяет сканировать дифракционные максимумы, для которых p и m не равны нулю в двух взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 2.13).

Пусть световая волна падает на область взаимодействия под углом, который близок к углу Брэгга для каждой из управляющих волн. При достаточной длине области взаимодействия в решении необходимо учитывать четыре дифракционных максимума C_{00} , C_{10} , C_{01} и C_{11} , для которых из (2.5.3) можно получить:

$$\begin{aligned} 2(dC_{00}/dx) &= -q_{100}C_{10} \exp(-j\eta_{100}x) - q_{200}C_{01} \exp(-j\eta_{200}x); \\ 2(dC_{10}/dx) &= q_{110}C_{00} \exp(j\eta_{100}x) - q_{210}C_{11} \exp(-j\eta_{210}x); \\ 2(dC_{01}/dx) &= -q_{101}C_{11} \exp(-j\eta_{101}x) + q_{201}C_{00} \exp(j\eta_{200}x); \\ 2(dC_{11}/dx) &= q_{111}C_{01} \exp(j\eta_{101}x) + q_{211}C_{10} \exp(j\eta_{210}x). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Обычно величины q_{1pm} и q_{2pm} слабо зависят от p и m , так что можно считать $q_{100} = q_{101} = q_{110} = q_{111} = q_1$; $q_{200} = q_{201} = q_{210} = q_{211} = q_2$. Кроме того, $\eta_{100} \approx \eta_{101} = \eta_1$ и $\eta_{200} \approx \eta_{201} = \eta_2$. В этом приближении система уравнений (2.5.8) легко решается. Если частоты Ω_1 и Ω_2 подобраны так, что $\eta_1 = \eta_2 = 0$, то из (2.5.8) могут быть определены амплитуды всех четырех дифракционных максимумов

$$\begin{aligned} C_{00} &= \cos(q_1x/2) \cos(q_2x/2); & C_{10} &= \sin(q_1x/2) \cos(q_2x/2); \\ C_{01} &= \cos(q_1x/2) \sin(q_2x/2); & C_{11} &= \sin(q_1x/2) \sin(q_2x/2). \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Соотношения (2.5.9) показывают, что при $q_1x = q_2x = \pi$ вся интенсивность света может быть перекачана в наиболее интересный максимум C_{11} , который при изменении частот Ω_1 и Ω_2 сканирует в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Однако при изменении частоты ультразвука условие $\eta_1 = \eta_2 = 0$ нарушается и система уравнений (2.5.8) имеет решение более сложное, чем (2.5.9).

В этом случае амплитуды света в дифракционных максимумах равны:

$$\begin{aligned}
C_{00} &= \left[\cos \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2 \right) + \frac{1}{2} j \eta_1 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2\pi \right) \right] \times \\
&\times \left[\cos \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2 \right) + \frac{1}{2} j \eta_2 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2\pi \right) \right] \times \\
&\times \exp[-j(\eta_1 + \eta_2) x/2]; \\
C_{10} &= \frac{1}{2} q_1 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2\pi \right) \left[\cos \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} j \eta_2 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2\pi \right) \right] \exp[j(\eta_1 - \eta_2) x/2]; \\
C_{01} &= \frac{1}{2} q_2 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2\pi \right) \left[\cos \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2 \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} j \eta_1 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2\pi \right) \right] \exp[j(\eta_2 - \eta_1) x/2]; \\
C_{11} &= \frac{1}{4} q_1 x q_2 x \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_1^2 + q_1^2} x/2\pi \right) \operatorname{sinc} \left(\sqrt{\eta_2^2 + q_2^2} x/2\pi \right) \times \\
&\times \exp[j(\eta_1 + \eta_2) x/2].
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Сравнивая соотношения (2.5.10), (2.2.16) и (2.2.17), легко убедиться, что относительная интенсивность света, дифрагировавшего в максимум C_{11} такова, как будто происходит последовательная дифракция света на двух управляющих волнах. Этот результат не является заранее очевидным, так как при дифракции на двух взаимно перпендикулярных волнах происходит эффективный обмен энергией между всеми четырьмя дифракционными максимумами.

Система уравнений (2.5.3) становится несправедливой, если частоты Ω_1 и Ω_2 равны между собой, а вектора \vec{K}_1 и \vec{K}_2 — коллинеарны. Важным частным случаем такой волны является стоячая акустическая волна, которая может быть представлена в виде двух упругих волн одинаковой амплитуды и частоты, бегущих навстречу друг другу. При дифракции света на таких двух волнах в каждый дифракционный максимум попадает световая энергия в результате дифракции как на прямой, так и на обратной акустической волне. Например, +1-ый максимум дифракции па прямой волне геометрически совпадает с -1-ым максимумом, образуемым при дифракции на волне обратного направления распространения. Частоты же волн +1-го и -1-го максимумов отличаются на 2Ω . Это приводит к появлению биений световой энергии в каждом из дифракционных максимумов с частотой, кратной 2Ω . При количественном описании дифракции света на стоячей ультразвуковой волне будем считать, что направление распространения этой волны совпадает с осью z . В этом случае изменение показателя преломления в области взаимодействия света и звука может быть записано в виде

$$\Delta n_0 \sin(Kz - \Omega t) + \Delta n_0 \sin(Kz + \Omega t) = 2\Delta n_0 \cos \Omega t \sin Kz.$$

Удобно ввести обозначение

$$\Delta n = 2\Delta n_0 \cos \Omega t. \tag{2.5.11}$$

Таким образом, показатель преломления принимает вид

$$n(z, t) = n + \Delta n(t) \sin Kz. \quad (2.5.12)$$

Выражения (2.5.11) и (2.5.12) показывают, что наличие стоячей акустической волны эквивалентно появлению в среде неподвижной дифракционной решетки, амплитуда которой периодически меняется во времени. Обычно частота этого изменения много меньше частоты оптических колебаний $\Omega \ll \omega_0$. При выполнении этого условия можно считать, что Δn зависит от времени, как от параметра.

Электрическое поле световой волны в области взаимодействия света и звука ($0 \leq x \leq l$) в этом случае естественно искать в виде

$$E = E_0 \sum_p C_p(x) \exp[j(k_{px}x + k_{pz}z)] \exp(-j\omega_0 t). \quad (2.5.13)$$

Подставляя искомое решение (2.5.13) в уравнение (2.1.3), получим следующую систему дифференциальных уравнений, связывающих амплитуды $C_p(x)$:

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{k_0^2}{2k_{px}} \frac{\Delta n(t)}{n} [C_{p-1}(x) \exp(j\eta_{p-1}x) - C_{p+1} \exp(-j\eta_p x)]. \quad (2.5.14)$$

Система уравнений (2.5.14) отличается от (2.1.15) главным образом тем, что Δn зависит от времени по закону (2.5.11). Все решения (2.1.15), полученные в §§ 2.2, 2.3, 2.4, применимы и к (2.5.14) с учетом того, что для (2.5.14) величины q_p (2.2.2) оказываются периодически зависящими от времени. Таким образом, при дифракции света на стоячей акустической волне интенсивности света во всех дифракционных максимумах (кроме нулевого) оказываются промодулированы на 100% частотой 2Ω и ее гармониками.

2.6 Дифракция расходящейся световой волны на произвольной акустической волне

Задача о дифракции произвольной световой волны на произвольной акустической волне, распространяющейся в плоско-параллельном слое изотропной, немагнитной диэлектрической среды толщиной l может быть решена с использованием методов фурье-оптики. Будем считать, что акустическая волна распространяется в пределах слоя $0 \leq x \leq l$. На границу этого слоя при $x = 0$ падает произвольная световая волна, электрическое поле которой при $x = 0$ может быть представлено в виде:

$$E_i = \frac{1}{8\pi^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U_1(0, k_y, k_z, \omega) \exp[j(k_y y + k_z z - \omega t)] dk_y dk_z d\omega. \quad (2.6.1)$$

Выражение (2.6.1) представляет собой разложение исходного светового поля по плоским монохроматическим световым волнам с заданным направлением распространения. Амплитуда каждой из этих волн определяется функцией U_1 .

Световое поле внутри области акустооптического взаимодействия также может быть разложено по плоским монохроматическим волнам, но амплитуды этих волн должны зависеть от координаты x . Таким образом, внутри области взаимодействия можно записать

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} [U_1(x, k_y, k_z, \omega) e^{jk_x x} + U_{-1}(x, k_y, k_z, \omega) e^{-jk_x x}] e^{j(k_y y + k_z z - \omega t)} dk_y dk_z d\omega, \quad (2.6.2)$$

причем волновой вектор \vec{k} и частота ω каждой плоской волны связаны между собой соотношением

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = |\vec{k}|^2 = \omega^2 n^2 / c^2. \quad (2.6.3)$$

Спектральная функция $U_1(x, k_y, k_z, \omega)$ определяет спектр плоских монохроматических волн, распространяющихся в положительном направлении вдоль оси x , а $U_{-1}(x, k_y, k_z, \omega)$ — волн, распространяющихся навстречу направлению падающей волны (отраженных решеткой).

Обе спектральные функции $U_\alpha(x, k_y, k_z, \omega)$ могут быть найдены через общее поле $E(x, y, z, t)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

$$U_1 e^{jk_x x} + U_{-1} e^{-jk_x x} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} E e^{-j(k_y y + k_z z - \omega t)} dy dz dt. \quad (2.6.4)$$

Аналогично тому, как это делалось в § 2.1, наложим на функции U_α дополнительное условие

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} e^{jk_x x} + \frac{\partial U_{-1}}{\partial x} e^{-jk_x x} = 0. \quad (2.6.5)$$

Соотношение (2.6.5) совместно с (2.6.4) дает возможность однозначно определить функции U_α .

Изменение показателя преломления среды, связанное с распространением в этой среде произвольной акустической волны, также представим в виде разложения по плоским волнам

$$\Delta n a(x, y, z, t) = \frac{\Delta n}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} A(x, K_y, K_z, \Omega) e^{j(K_x x + K_y y + K_z z - \Omega t)} dK_y dK_z d\Omega. \quad (2.6.6)$$

Здесь Δn — амплитуда изменения показателя преломления, зависящая от мощности акустической волны, а $a(x, y, z, t)$ — функция, характеризующая неоднородность показателя преломления. Максимальное значение функции a считается равным единице. Волновой вектор каждой монохроматической акустической волны \vec{K} и ее частота Ω связаны соотношением

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = |\vec{K}|^2 = \Omega^2 / v^2, \quad (2.6.7)$$

где v — скорость звука в среде.

Решение дифракционной задачи сводится к решению следующего скалярного волнового уравнения для поля E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{2n\Delta n}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(aE). \quad (2.6.8)$$

Подставим в это уравнение вместо E и a их выражения в виде (2.6.2) и (2.6.6). Учитывая (2.6.5) и (2.6.3), получим следующую систему уравнений первого порядка для функций U_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\alpha}{\partial x}(x, k_y, k_z, \omega) = j\alpha \frac{k^2}{k_x} \frac{\Delta n}{n} \frac{1}{8\pi^3} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int \int A [U_\alpha(x, k'_y, k'_z, \omega') e^{j\eta_\alpha x} + U_{-\alpha}(x, k'_y, k'_z, \omega') e^{j\xi_\alpha x}] dK_y dK_z d\Omega. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm 1; \\ k'_y &= k_y - K_y; \\ k'_z &= k_z - K_z; \\ \omega' &= \omega - \Omega; \\ k'_x &= \sqrt{(\omega')^2 n^2 / c^2 - (k'_y)^2 - (k'_z)^2}; \\ \eta_\alpha &= K_x - \alpha(k_x - k'_x); \\ \xi_\alpha &= K_x - \alpha(k_x + k'_x). \end{aligned}$$

Уравнения (2.6.9) получаются из волнового уравнения (2.6.8) совершенно точно, без каких-либо приближений. Они должны решаться с граничными условиями, задаваемыми на границах области взаимодействия света и звука при $x = 0$ и $x = l$. Граничное условие при $x = 0$ определяется световой волной, падающей на область взаимодействия со стороны отрицательных x . В соответствии с (2.6.1) граничное условие при $x = 0$ имеет вид

$$U_1(0, k_y, k_z, \omega) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int E_i(0, y, z, t) e^{-j(k_y y + k_z z - \omega t)} dy dz dt, \quad (2.6.10)$$

где E_i — электрическое поле волны, падающей на область взаимодействия со стороны отрицательных x .

Граничное условие при $x = l$ определяется полем световых волн, падающих на область взаимодействия света и звука справа, со стороны положительных значений x . При обычной постановке задачи дифракции эти волны полностью отсутствуют. В этом случае граничное условие при $x = l$ принимает вид

$$U_{-1}(l, k_y, k_z, \omega) = 0. \quad (2.6.11)$$

Впрочем, задача может быть решена и в более сложном случае, когда справа на область взаимодействия падают какие-либо произвольные световые волны (например, отраженные от последующих оптических элементов).

Система уравнений (2.6.9) с граничными условиями (2.6.10), (2.6.11) является естественным обобщением системы уравнений (2.1.12) на случай, когда спектры акустической и световой волн имеют произвольный вид. Отличия связаны с тем, что в случае непрерывного спектра падающей световой волны и управляющей акустической волны спектр дифрагированного света оказывается также непрерывным. Это приводит к тому, что спектральные дифракционные порядки перекрываются и теряют физический смысл. Поэтому дискретный индекс p в уравнениях (2.1.12) заменяется на непрерывные переменные k_y, k_z, ω в уравнениях (2.6.9).

Общее решение системы уравнений (2.6.9) можно искать в виде разложения искомых функций U_α в ряд по малому параметру $\Delta n/n$.

$$U_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^i U_\alpha^{(i)}. \quad (2.6.12)$$

В качестве нулевого приближения в этих рядах естественно выбрать функции, определяемые граничными значениями $U_1(0)$ и $U_{-1}(l)$.

$$U_1^{(0)} = U_1(0, k_y, k_z, \omega); \quad U_{-1}^{(0)} = U_{-1}(l, k_y, k_z, \omega) = 0. \quad (2.6.13)$$

Подставляя (2.6.12) в уравнения (2.6.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим

$$\frac{\partial U_\alpha^{(i+1)}}{\partial x} = j\alpha \frac{k^2}{k_x} \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} A \left[U_\alpha^{(i)} e^{j\eta_\alpha x} + U_{-\alpha}^{(i)} e^{j\xi_\alpha x} \right] dK_y dK_z d\Omega. \quad (2.6.14)$$

Граничные условия (2.6.11) и (2.6.10) совместно с (2.6.13) показывают, что для всех i , не равных нулю, $U_1^{(i)}(0, k_y, k_z, \omega) = 0$, а $U_{-1}^{(i)}(l, k_y, k_z, \omega) = 0$ для всех i . Учитывая это обстоятельство, можно проинтегрировать соотношения (2.6.14) по x и получить

$$U_1^{(i+1)}(x) = j \frac{k^2}{k_x} \frac{1}{8\pi^3} \int_0^x \iiint_{-\infty}^{\infty} A \left[U_1^{(i)} e^{j\eta_1 x} + U_{-1}^{(i)} e^{j\xi_1 x} \right] dK_y dK_z d\Omega dx; \quad (2.6.15)$$

$$U_{-1}^{(i+1)}(x) = j \frac{k^2}{k_x} \frac{1}{8\pi^3} \int_x^l \iiint_{-\infty}^{\infty} A \left[U_1^{(i)} e^{j\xi_{-1} x} + U_{-1}^{(i)} e^{j\eta_{-1} x} \right] dK_y dK_z d\Omega dx. \quad (2.6.16)$$

Соотношения (2.6.15) и (2.6.16) позволяют рассчитать последовательно любой член ряда (2.6.12), представляющего собой точное решение задачи дифракции.

Рассмотрим (2.6.15), (2.6.16) в первом приближении для случая, когда спектр звука A не зависит от координаты x . Поскольку $U_\alpha^{(0)}$ также не зависят от x , интегрирование по координате x в пределах от 0 до l дает

$$U_1^{(1)}(l) = j \frac{k^2}{k_x} \frac{l}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} A U_1^{(0)} \operatorname{sinc} \frac{\eta_1 l}{2\pi} e^{j\eta_1 l/2} dK_y dK_z d\Omega; \quad (2.6.17)$$

$$U_{-1}^{(1)}(0) = j \frac{k^2}{k_x} \frac{l}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} A U_1^{(0)} \operatorname{sinc} \frac{\xi_{-1} l}{2\pi} e^{j\xi_{-1} l/2} dK_y dK_z d\Omega.$$

В выражениях (2.6.17) амплитуда спектра U_1 записана для точки $x = l$, а U_{-1} — для точки $x = 0$, то есть на правой и левой границах области взаимодействия. Под знаком интеграла в (2.6.17) стоит произведение трех спектральных функций. Первые две из них, A и $U_1^{(0)}$, были определены выше и описывают соответственно управляющую волну и падающий световой поток. Третья функция характеризует акустооптическую ячейку. Основные особенности решения (2.6.17), описывающего дифракцию света на слабой управляющей волне, существенно зависят от относительных размеров и взаимного расположения в пространстве частот трех указанных выше функций.

В случае малой толщины области взаимодействия, когда $\eta_1 l < \pi$ для всех рассматриваемых пространственных частот, спектральная функция акустооптической ячейки может считаться постоянной. Поэтому $U_1^{(1)}$ вычисляется как операция свертки A и $U_1^{(0)}$. Если при этом $U_1^{(0)} = \delta(k_y - k_{y0}) \delta(k_z - k_{z0}) \delta(\omega - \omega_0)$, т. е. падающая световая волна является монохроматической и плоской, то $U_1^{(1)}$ совпадает с A , перенесенной в дифракционный максимум.

$$U_1^{(1)} = j \frac{k^2 l}{k_x} A(k_y - k_{y0}, k_z - k_{z0}, \omega - \omega_0).$$

Отсюда следует, что изображение, зафиксированное акустическим полем, визуализируется в этом случае дифрагировавшей световой волной [54]. Визуализация отраженной волной $U_{-1}^{(1)}$ возможна при $\xi_{-1} l < \pi$.

Если в (2.6.17) при малой толщине области взаимодействия A стремится к дельта-функции, то $U_1^{(1)}$ совпадает со смещенной по частоте и углу функцией $U_1^{(0)}$. В этом случае (2.6.17) описывает отклоненный световой поток, имеющий те же характеристики, что и падающий свет, а угол отклонения является функцией K/k , т. е. изменяется с изменением частоты ультразвука. Этот режим соответствует сканированию оптическим изображением, зафиксированным падающим на ячейку светом.

В случае толстых фазовых решеток ($l \rightarrow \infty$) спектральная функция акустооптической ячейки имеет очень малую ширину и может рассматриваться при $l \rightarrow \infty$ как дельта-функция. В этом случае интегралы (2.6.17) отличны от нуля только при выполнении условий $\eta_1 = 0$ или $\xi_{-1} = 0$. Это условия существования дифракции Брэгга для прямой и отраженной дифрагированных волн. Рассматривая (2.6.17), можно заметить, что для визуализации структуры управляющего поля в случае дифракции Брэгга необходима не плоская световая волна, как в случае малых l , а изотропно расходящаяся (сферическая волна). В такой волне $U_1^{(0)}$ является константой и $U_1^{(1)}$ повторяет спектр звука A , но с изменением масштаба в 2 раза (см. рис. 2.14). Для осуществления процесса сканирования света в случае больших l необходима сферическая управляющая волна. В этом легко убедиться, заменив в (2.6.17) функцию A на константу. Следует отметить, что в промежуточных случаях конечного l спектр дифрагированной волны существенно искажается спектральной функцией акустооптической ячейки.

Визуализация структуры акустической волны является интересным явлением, находящим различные применения в науке и технике. Однако, как следует из (2.6.16), это явление характерно для малой эффективности дифракции. При

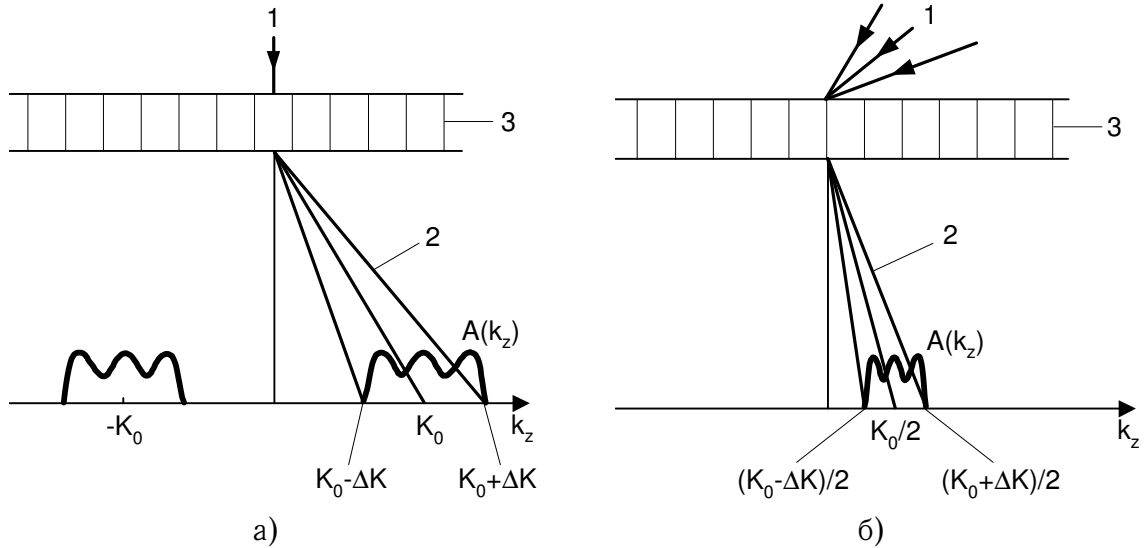


Рис. 2.14. Визуализация акустического изображения при дифракции Рамана-Ната (а) и дифракции Брэгга (б)

1 — падающая световая волна; 2 — дифракционный максимум;
3 — акустическая волна

увеличении Δn в рядах (2.6.13) уже нельзя ограничиться первыми членами. Учет же следующих членов приводит к появлению в дифрагированной волне многократных сверток акустической волны самой с собой. Роль этих членов возрастает с ростом Δn . При этом в первую очередь искажаются полутона и мелкие детали изображения. Таким образом, чем выше требования к четкости изображения, тем более слабым должно быть акустическое поле.

Рассмотрим некоторые интересные для практики частные случаи дифракции света на немонохроматической звуковой волне.

При работе акустооптических процессоров в некоторой полосе частот радиосигналов Ω , обрабатываемых акустооптически, обычно можно считать акустическую волну плоской и распространяющейся в определенном направлении (ось z). В этом случае функция $a(x, y, z, t)$ не зависит от x и y , а спектр этой функции не зависит от x и K_y . Вследствие соотношения (2.6.7) единственная имеющаяся компонента волнового вектора $K_z = K$ однозначно связана с частотой Ω : $K = \Omega/v$. Это означает, что спектральная функция акустической волны имеет вид $A(x, K_y, K_z, \Omega) = A(K) \delta(K_y) \delta(\Omega - Kv)$. Подставляя эту функцию в (2.6.9), получим

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x} = j\alpha \frac{k^2}{k_x} \frac{\Delta n}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(K) [U_\alpha(x, k_z - K, \omega - Kv) e^{j\eta_\alpha x} + U_{-\alpha}(x, k_z - K, \omega - Kv) e^{j\xi_\alpha x}] dK. \quad (2.6.18)$$

При выводе (2.6.18) предполагалось, что волновой вектор падающей световой волны не имеет проекции на ось y .

Уравнения (2.6.18) описывают, например, работу акустооптического анализатора спектра, в котором каждое направление дифракции света (в плоско-

сти xy) соответствует определенной частоте анализируемого радиосигнала.

Так же, как и при дифракции света на монохроматической и плоской звуковой волне в отсутствие K_x , компонента света U_{-1} , дифрагировавшая против направления падающей волны, обычно очень мала. Поэтому уравнения (2.6.18) еще упрощаются. Вместо них можно решать одно уравнение

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = j \frac{k^2}{k_x} \frac{\Delta n}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(K) U_1(x, k_z - K, \omega - Kv) e^{j\eta_1 x} dK. \quad (2.6.19)$$

Индекс 1 у функции U_1 в дальнейшем будет опускаться.

В частном случае дифракции света на монохроматической ультразвуковой волне с частотой Ω_0 и волновым вектором K_0 пространственный спектр звука равен

$$A(K) = \frac{1}{2j} [\delta(K - K_0) - \delta(K + K_0)].$$

Уравнение (2.6.19) в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k^2}{2k_x} \frac{\Delta n}{n} [U(x, k_z - K_0, \omega - \Omega_0) e^{-j\eta_1 x} - U(x, k_z + K_0, \omega + \Omega_0) e^{-j\eta_2 x}], \quad (2.6.20)$$

где

$$\eta_1 = k_x - \sqrt{(\omega - \Omega_0)^2 n^2 / c^2 - (k_z - K_0)^2};$$

$$\eta_2 = k_x - \sqrt{(\omega + \Omega_0)^2 n^2 / c^2 - (k_z + K_0)^2}.$$

Из (2.6.20) легко получить уравнение (2.1.15), если падающая световая волна является плоской и монохроматической. Уравнение (2.6.20) с соответствующим граничным условием позволяет решить задачу о дифракции расходящейся (и немонхроматической в общем случае) световой волны на плоской монохроматической акустической волне.

Если на пьезопреобразователь акустооптической ячейки подается электрический сигнал, модулированный по амплитуде с глубиной модуляции m

$$S(t) = S_0(1 + m \cos \Delta\Omega t) \sin \Omega t,$$

то по ячейке бегут вдоль оси z три акустические волны

$$a(z, t) = \sin(K_0 z - \Omega_0 t) + \frac{m}{2} \sin(K_1 z - \Omega_1 t) + \frac{m}{2} \sin(K_2 z - \Omega_2 t), \quad (2.6.21)$$

где $K_i = \Omega_i/v$; $\Omega_1 = \Omega_0 - \Delta\Omega$; $\Omega_2 = \Omega_0 + \Delta\Omega$. Пространственная спектральная функция такого звука имеет вид

$$A(K) = \frac{1}{2j} \left\{ \delta(K - K_0) - \delta(K + K_0) + \frac{m}{2} [\delta(K - K_1) - \delta(K + K_1) + \delta(K - K_2) - \delta(K + K_2)] \right\}. \quad (2.6.22)$$

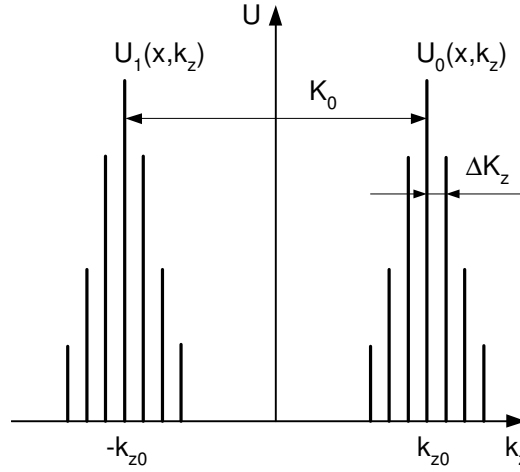


Рис. 2.15. Схема дифракции Брэгга на модулированном акустическом пучке

Подставляя (2.6.22) в уравнение (2.6.19), получим уравнение, описывающее дифракцию света на модулированной звуковой волне

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}(x, k_z) = \frac{k^2}{2k_x} \frac{\Delta n}{n} \left\{ [U(x, k_z - K_0) e^{-j\eta_1 x} - U(x, k_z + K_0) e^{-j\eta_2 x}] + \right. \\ \left. + \frac{m}{2} [U(x, k_z - K_1) e^{-j\eta_3 x} - U(x, k_z + K_1) e^{-j\eta_4 x} + \right. \\ \left. + U(x, k_z - K_2) e^{-j\eta_5 x} - U(x, k_z + K_2) e^{-j\eta_6 x}] \right\}. \quad (2.6.23) \end{aligned}$$

Будем решать уравнение (2.6.23) для случая, когда падающая световая волна является плоской и монохроматической, а угол ее падения выбран так, что выполняется условие Брэгга для дифракции этой волны на звуковом сигнале частоты Ω_0 . Если длина области взаимодействия света и звука достаточно велика, так что дифракция возможна только в первый дифракционный максимум, то уравнение (2.6.23) распадается на два уравнения для нулевого и первого дифракционных максимумов, т. к. функция $U(x, k_z)$ не равна нулю только вблизи точек $k_z = -k_{z0}$ и $k_z = k_{z0}$ (см. рис. 2.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{q}{2} \left\{ U_0(x, k_z - K_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2} [U_0(x, k_z - K_1) e^{-j\eta x} + U_0(x, k_z - K_2) e^{j\eta x}] \right\}; \\ \frac{\partial U_0}{\partial x} &= -\frac{q}{2} \left\{ U_1(x, k_z + K_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2} [U_1(x, k_z + K_1) e^{j\eta x} + U_1(x, k_z + K_2) e^{-j\eta x}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} q &= \frac{k^2}{k_x} \frac{\Delta n}{n}; \quad \eta \approx k_{z0} \Delta K / k_{x0}; \\ \Delta K &= \Delta \Omega / v = K_2 - K_0 = K_0 - K_1. \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

При выводе предполагалось, что $\Delta K \ll K_0$.

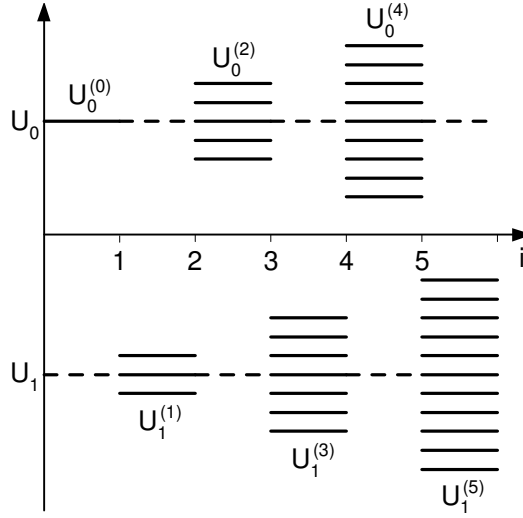


Рис. 2.16. Диаграмма уширения максимумов при дифракции Брэгга на модулированной акустической волне

Применим метод последовательных приближений к решению системы (2.6.24). В нулевом приближении $U_1 = 0$, а $U_0 = \delta(k_z - k_{z0})$. В первом приближении получим для U_1

$$U_1^{(1)} = \frac{qx}{2} \left\{ \delta(k_z - k_{z0} + K_0) + \frac{m}{2} \operatorname{sinc} \frac{\eta x}{2\pi} \left[\delta(k_z - k_{z0} + K_1) e^{-j\eta x/2} + \delta(k_z - k_{z0} + K_2) e^{j\eta x/2} \right] \right\}. \quad (2.6.26)$$

Как и следовало ожидать, U_1 в первом приближении состоит из трех спектральных компонент, отличающихся направлением распространения света (и его частотой). Спектр $U_1^{(1)}$ повторяет спектр звука, если $\eta l \ll 2\pi$. При этом $\Delta K/K_0 \ll 2/Q$. При выполнении этого условия функция $\operatorname{sinc}(\eta x/2\pi)$ равна единице и метод последовательных приближений легко может быть продолжен. Во втором приближении $U_2^{(0)}$ состоит из 5 компонент, изображенных на рис. 2.16. Амплитуда центральной равна $(qx/2)^2(1 + m^2/2)$, амплитуда компонент, соседних с центральной, равна $m(qx/2)^2$, а амплитуда крайних компонент — $m^2(qx/4)^2$. Переход к последующим приближениям сопровождается дальнейшим расширением спектра дифрагирующего света в соответствии с рис. 2.16. Надо иметь в виду, что переход из каждого состояния, изображенного на рис. 2.16, возможен лишь в 3 состояния следующего приближения в соответствии с (2.6.24). Это приводит к тому, что амплитуды боковых компонент, отстоящих на $i\Delta K$ от центральных компонент нулевого и первого дифракционных спектров, пропорциональны m^i и при не слишком большой глубине модуляции становятся малыми. Процесс уменьшения амплитуд боковых компонент становится еще более быстрым, если неравенство $\Delta K/K_0 \ll 2/Q$ является не очень сильным. В этом случае убывание боковых компонент происходит не только за счет малости глубины модуляции звука, но и вследствие селективности брэгговской дифракции света.

Если ширина спектра управляющего акустического сигнала достаточно велика и $\Delta K/K_0 \gg 2/Q$, то функция $\operatorname{sinc}(\eta x/2\pi)$ в правой части (2.6.26) малы.

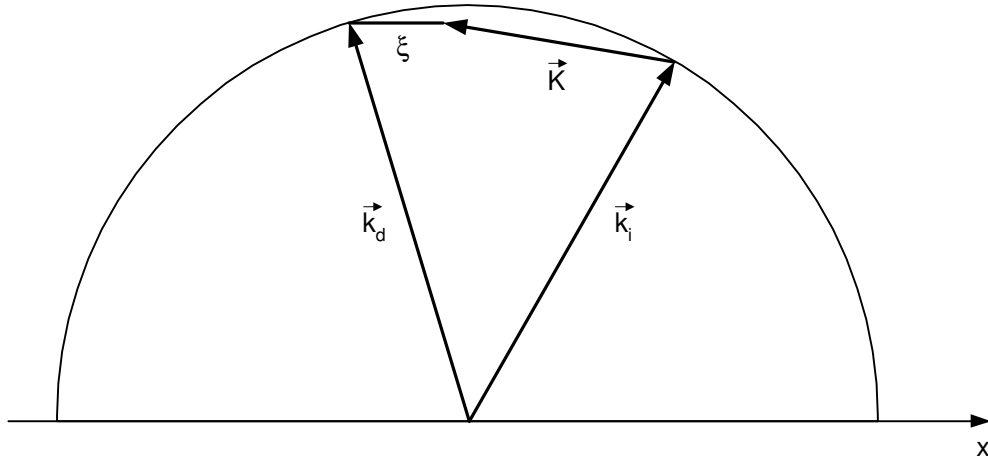


Рис. 2.17. Векторная диаграмма брэгговской дифракции отраженной волны

В этом случае из-за селективности брэгговской дифракции плоская световая волна дифрагирует только на одной центральной компоненте акустической волны (2.6.21). Спектр дифрагировавшего света в этом случае состоит из одной линии.

Интересно проанализировать вытекающую из уравнений (2.6.9) возможность брэгговской дифракции для отраженной световой волны. Такая возможность появляется в том случае, когда волновой вектор звука \vec{K} имеет достаточно большую проекцию на ось x . Если $K_x \approx -(k_x + k'_x)$, то рассинхронизм ξ_{-1} становится малым и возможно эффективное длительное взаимодействие падающей волны с отраженной дифракционной волной. Векторная диаграмма такого взаимодействия изображена на рис. 2.17.

Пусть падающая световая волна и упругая акустическая волна являются плоскими и монохроматическими, а длина области взаимодействия l достаточно велика, чтобы пренебречь всеми дифракционными максимумами, кроме двух, тогда уравнения (2.6.9) для рассматриваемого взаимодействия принимают вид:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{q}{2} U_{-1} e^{j\xi x}; \quad \frac{\partial U_{-1}}{\partial x} = \frac{q}{2} U_1 e^{-j\xi x}, \quad (2.6.27)$$

где ξ — расстройка волновых векторов, изображенная на рис. 2.17. Уравнения (2.6.27) должны быть решены с граничными условиями $U_1(0) = 1$; $U_{-1}(l) = 0$.

Интегрируя (2.6.27), получим

$$U_1(x) = \frac{\sqrt{q^2 - \xi^2} \operatorname{ch} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} (l - x)/2 \right] + j\xi \operatorname{sh} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} (l - x)/2 \right]}{\sqrt{q^2 - \xi^2} \operatorname{ch} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right] + j\xi \operatorname{sh} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right]} e^{j\xi x/2};$$

$$U_{-1}(x) = -\frac{q \operatorname{sh} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} (l - x)/2 \right]}{\sqrt{q^2 - \xi^2} \operatorname{ch} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right] + j\xi \operatorname{sh} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right]} e^{-j\xi x/2}. \quad (2.6.28)$$

Решение (2.6.28) как для падающей волны U_1 , так и для дифрагировавшей волны U_{-1} , существенно отличается от обычного решения задачи о брэгговской

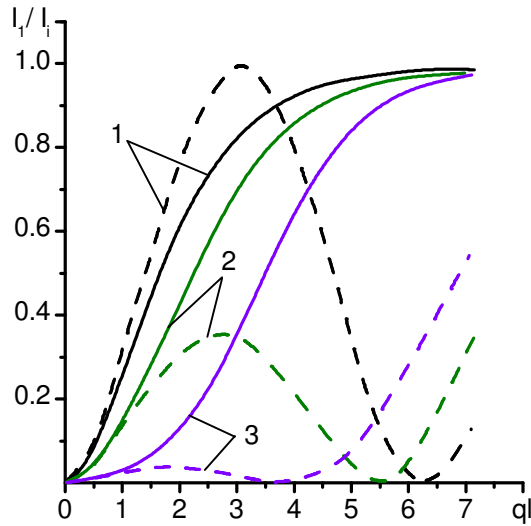


Рис. 2.18. Зависимость I_1/I_i от ql при брэгговской дифракции отраженной волны:

1 — $\xi l = 0$; 2 — $\xi l = 3$; 3 — $\xi l = 5$;
пунктир — дифракция прямой волны при той же расстройке

дифракции прямой волны (см., например, (2.2.16), (2.2.17)). На рис. 2.18 изображены зависимости интенсивности света в дифракционном максимуме $U_{-1}U_{-1}^*$ от ql в точке $x = 0$ при различных значениях расстроек волновых векторов ξl . На этом же рисунке пунктирными линиями изображены соответствующие кривые для дифракции вперед при $x = l$. Из рисунка видно, что при малых ql интенсивности света, дифрагировавшего вперед и назад, при одинаковых расстройках совпадают. Однако при больших ql они существенно различаются. Для отраженной дифрагировавшей волны характерно монотонное изменение интенсивности от ql с асимптотическим приближением к максимальному значению, а при дифракции вперед происходит многократный обмен энергией между проходящей и дифрагированной волнами. При расчете кривых на рис. 2.18, для которых $\xi \neq 0$, на части каждой кривой расстройка волновых чисел ξ оказывается больше величины q . В этом случае гиперболические функции в (2.6.28) заменяются на тригонометрические с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right] &= -j \sin \left[\sqrt{\xi^2 - q^2} l/2 \right]; \\ \operatorname{ch} \left[\sqrt{q^2 - \xi^2} l/2 \right] &= \cos \left[\sqrt{\xi^2 - q^2} l/2 \right]. \end{aligned}$$

Появление тригонометрических функций в (2.6.28) приводит к небольшим колебаниям $U_{-1}U_{-1}^*$ возле нуля при малых ql и больших ξl . Однако с ростом ql величина $U_{-1}U_{-1}^*$ увеличивается и стремится к максимальному значению.

2.7 Дифракция света на поверхностной акустической волне

Исследование дифракции света на поверхностной акустической волне (ПАВ) дает возможность определить параметры и основные характеристики этой волны, а также может быть использовано при создании ячеек оптической обработки информации в интегральном исполнении. Практически осуществляются два основных варианта такой дифракции. Это дифракция объемной световой волны, пересекающей поверхность, с ПАВ, и дифракция волноводной световой волны, распространяющейся вдоль световода, расположенного на той же поверхности, по которой бежит ПАВ.

Первый из этих вариантов является частным случаем дифракции объемной световой волны на неоднородной звуковой волне, рассмотренной в общем виде в § 2.6. Характер неоднородности ПАВ в направлении нормали к поверхности весьма сложен и зависит от свойств среды, по которой распространяется ПАВ. Компоненты вектора смещения для волны Рэлея, которая распространяется по оси z вдоль поверхности $x = 0$, в общем случае для анизотропной, пьезоэлектрической среды, задаются в виде линейной комбинации четырех парциальных волн []

$$A_m = \sum_{n=1}^4 C_n \alpha_m^{(n)} \exp [jK(z - vt) - b_n x] , \quad (2.7.1)$$

где $m = x, y, z$, C_n — постоянные коэффициенты, $\alpha_m^{(n)}$ и b_n — амплитуды и коэффициенты затухания парциальных волн, v и K — скорость и волновое число ПАВ. Для определения структуры ПАВ, (2.7.1) подставляется в волновое уравнение упругих волн и определяются величины C_n , $\alpha_m^{(n)}$, b_n и v с учетом обращения в нуль механического напряжения на поверхности, несущей ПАВ. В аналитическом виде это удастся сделать только в самом простом случае изотропной акустической среды. В остальных случаях задача решается численно для заданного конкретного направления волны в конкретном кристалле. После расчета компонент вектора смещения с их помощью могут быть определены изменения компонент тензора диэлектрической проницаемости среды $\Delta\epsilon$ и изменение показателя преломления Δn .

В общем случае анизотропной среды $\Delta n(x)$ можно записать в таком виде:

$$\Delta n(x) = \sum_{i=1}^3 D_i \exp(-d_i x) , \quad (2.7.2)$$

где D_i и d_i — комплексные коэффициенты.

Для гармонической ПАВ изменение показателя преломления под действием звука можно всегда представить следующим выражением:

$$\Delta n(x, z, t) = \Delta n a(x) \sin[K_0 z - \Omega_0 t + \Phi(x)] . \quad (2.7.3)$$

Спектр (2.7.3) в соответствии с (2.6.6) равен

$$A(x, K_y, K_z, \Omega) = \frac{a(x)}{2j} \delta(K_y) [\delta(K_z - K_0) \delta(\Omega - \Omega_0) e^{j\Phi(x)} - \delta(K_z + K_0) \delta(\Omega + \Omega_0) e^{-j\Phi(x)}] .$$

Подставляя это выражение в (2.6.9) и пренебрегая волнами, отраженными решеткой, получим уравнение, описывающее дифракцию света на ПАВ

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k^2}{2k_x} \frac{\Delta n}{n} a(x) \{ U(x, k_z - K_0, \omega - \Omega_0) \exp[-j(\eta_1 x - \Phi)] - U(x, k_z + K_0, \omega + \Omega_0) \exp[-j(\eta_2 x + \Phi)] \}. \quad (2.7.4)$$

Если падающая световая волна является плоской и монохроматической, то уравнение (2.7.4) распадается на систему уравнений для отдельных дифракционных максимумов

$$\frac{dC_p}{dx} = \frac{k_p^2}{2k_x} \frac{\Delta n}{n} a(x) \{ C_{p-1} e^{j[\eta_{p-1}x + \Phi(x)]} - C_{p+1} e^{-j[\eta_p x + \Phi(x)]} \}. \quad (2.7.5)$$

Уравнение (2.7.5) для дифракции света на ПАВ отличается от (2.1.15), описывающего дифракцию света на объемной акустической волне, только тем, что для ПАВ коэффициент q и фаза Φ зависят от координаты x . Другим существенным обстоятельством является то, что глубина проникновения ПАВ в среду примерно равна длине волны звука в среде Λ . Это означает, что волновой параметр для ПАВ равен $Q = \lambda / \Lambda n$, т. е. режим дифракции объемной световой волны на ПАВ обычно является режимом Рамана-Ната и никогда не становится режимом Брэгга. Если $\lambda / \Lambda n \ll 1$ и угол дифракции мал, то $\eta_p \approx K_0 \operatorname{tg} \theta_i$ и не зависит от номера p . В этом случае $k_{px} \approx k_p \cos \theta_i$ и коэффициент q_p практически не зависит от p . Система уравнений (2.5.6) при таких предположениях интегрируется подобно тому, как это было сделано в § 2.2 (см. (2.2.14)).

Амплитуда света в p -том дифракционном максимуме выражается через функцию Бесселя p -го порядка.

$$C_p(x) = C \mathcal{J}_p[D(x)] \exp[jp\alpha(x)], \quad (2.7.6)$$

где

$$D(x) \exp[j\alpha(x)] = \int_0^x q(x) \exp[j\eta x + \Phi(x)] dx. \quad (2.7.7)$$

Постоянная интегрирования C в (2.7.6) с хорошей степенью точностью может быть принята равной $T(\theta)$ — коэффициенту прохождения света в среду для данного угла его падения в воздухе θ .

Как уже было отмечено выше, величина $q(x)$ при $x > \Lambda$ становится малой, поэтому при $x > \Lambda$ амплитуды дифракционных максимумов перестают зависеть от x . Для нахождения этих стационарных амплитуд в интеграле (2.7.7) верхний предел можно заменить на бесконечность. Таким образом, при больших x функции $D(x)$ и $\alpha(x)$ превращаются в числа

$$D \exp(j\alpha) = \int_0^\infty q(x) \exp[j\eta x + \Phi(x)] dx. \quad (2.7.8)$$

Модуль интеграла (2.7.8) является аргументом функции Бесселя в (2.7.6).

Необходимо учесть также и дополнительную дифракцию световой волны, связанную с ее прохождением через поверхность, деформированную ПАВ. Обычно амплитуда искривления поверхности $2h$ не превышает нескольких десятков

ангстрем, т.е. она меньше длины волны звука и даже света. Поэтому изменение угла падения света на поверхность за счет искривления очень невелико.

В области $0 \leq x \leq 2h$ (область искривленной поверхности) световая волна подвергается фазовой модуляции порядка $2hk$ за счет искривления поверхности и порядка $2hk\Delta n/n$ за счет изменения показателя преломления среды, а также амплитудной модуляции порядка $2hK(\partial R/\partial\Theta)$ за счет изменения угла падения света на поверхность []. Здесь $R(\Theta)$ — френелевский коэффициент отражения света, падающего на поверхность под углом Θ . Максимальное значение производной $\partial R/\partial\Theta$ достигается при $\Theta = \pi/2$ и равно $2n^2/\sqrt{n^2-1}$. Поэтому при $k \gg K$ и $n \gg \Delta n$ можно пренебречь амплитудной модуляцией и вкладом изменения показателя преломления в области гофрированной поверхности. Таким образом, деформация поверхности при распространении ПАВ приводит лишь к (фазовой модуляции отраженного и прошедшего света. Для отраженной волны при $x = 0$ поле имеет вид

$$E = E_0 R(\Theta) \exp\{j[k_z z + 4kh \cos \Theta \sin(Kz - \Omega t) - \omega_0 t]\}. \quad (2.7.9)$$

Разлагая это выражение по плоским волнам, получим систему дифрагированных волн, отраженных от поверхности, искривленной за счет ПАВ. Величина $D_0 = 4kh \cos \Theta$ равняется максимальному фазовому сдвигу при отражении света от гофрированной поверхности. Таким образом, при $x < 0$ получаем отраженную световую волну, состоящую из набора дифракционных максимумов вида

$$E_{omp} = E_0 R(\Theta) \sum_p \mathcal{J}_p(D_0) \exp[j(k_{pz} z - k_{px} x - \omega_p t)]. \quad (2.7.10)$$

Аналогичным образом, для прошедшей волны можно записать, при $x = 2h$

$$\begin{aligned} E &= E_0 T(\Theta) \exp\{j[k_{0x} x + k_{0z} z + D_1 \sin(Kz - \Omega t) - \omega_0 t]\} = \\ &= E_0 T(\Theta) \sum_p \mathcal{J}_p(D_1) \exp[j(k_{pz} z + k_{px} x - \omega_p t)], \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

где $D_1 = 2kh(n \cos \theta - \cos \Theta)$ — максимальный фазовый сдвиг при прохождении света через искривленную поверхность.

Выражения (2.7.6) и (2.7.11) показывают, что дифракция на гофрированной поверхности (при $0 \leq x \leq 2h$) и на возмущенном показателе преломления внутри среды (при $x > 2h$) связаны только с фазовой модуляцией света. Поэтому можно считать, что при прохождении через область, занятую ПАВ, свет испытывает влияние двух следующих друг за другом фазовых дифракционных решеток. Их общее влияние определяется суммой фазовых набегов на искривленную поверхность и на возмущении показателя преломления. Таким образом, амплитуда p -го дифракционного порядка определяется выражением

$$C_p = T(\Theta) \mathcal{J}_p(D + D_1) \exp(jp\alpha). \quad (2.7.12)$$

Для иллюстрации точности расчета эффективности и угловой зависимости интенсивности дифрагированного света на рис. 2.19 приведены полученные экспериментально [] угловые зависимости дифракционной эффективности при отражении и прохождении света через ПАВ, распространяющейся по поверхности

кристалла LiNbO_3 . Сплошные кривые рассчитаны по приведенной выше теории и хорошо совпадают с полученными экспериментально точками. На рис. 2.19 хорошо видна характерная для дифракции света на ПАВ сильная зависимость эффективности дифракции от угла падения света. При дифракции света на объемной акустической волне зависимость эффективности от угла гораздо слабее и подобна кривой 1 на рис. 2.19. Это связано с тем, что дифракция на ПАВ происходит одновременно на трех фазовых решетках (искривление поверхности, упругооптическая решетка и электрооптическая решетка). Все три решетки имеют между собой различные фазовые соотношения, что и приводит к суммированию их воздействия в одних направлениях и к вычитанию влияния решеток при других направлениях падающего света.

Резкая угловая зависимость эффективности дифракции света на ПАВ позволяет обнаруживать отклонения от режима дифракции Рамана-Ната уже при достаточно малых Q . Например, на рис. 2.20 изображены нормированные угловые зависимости дифракционной эффективности при дифракции света на ПАВ в $+1$ -ый и -1 -ый максимумы для $Q = 0,063$. Даже при таких малых Q наблюдается отличие интенсивностей первого и минус первого максимумов, связанное с различием η_0 и η_{-1} . Поскольку это отличие пропорционально λ/Λ , то и угловое смещение максимумов на рис. 2.20 пропорционально этой величине. При дифракции на объемной акустической волне из-за большой угловой ширины заметить различие в интенсивностях первого и минус первого максимумов при таких малых Q очень сложно. Различие в эффективностях дифракции в $+1$ -ый и -1 -ый максимумы позволяет по дифракционной картине определить направление распространения ПАВ.

Анализ дифракции световодной оптической волны на ПАВ требует рассмотрения особенностей распространения оптических и акустических волн вдоль слоистой поверхности, что выходит за рамки данной книги. Хорошее изложение этих вопросов имеется в монографии [].