Глава 1

Электромагнитные и упругие волны в анизотропных средах. Упругооптический эффект

Акустооптическими называются явления, наблюдаемые при взаимодействии электромагнитных волн с акустическими возмущениями, распространяющимися в упругой среде. При этом наиболее сложные и богатые различными возможностями практического применения явления происходят при распространении акустических и электромагнитных волн в анизотропных твердых телах. Физической причиной взаимодействия электромагнитных и упругих волн является упругооптический эффект, имеющий место в любых упругих средах. В данной главе кратко рассматриваются особенности упругооптического эффекта и распространения электромагнитных и упругих волн в анизотропных средах. Изложению основного материала предшествует первый параграф, в котором даются правила тензорной математики, используемые в данной книге. Более подробное знакомство с вопросами, поднятыми в первой главе, читатель может получить из книг [11–15].

1.1 Бескоординатное представление тензоров и тензорных функций

Анализ различных физических явлений в анизотропных средах невозможен без последовательного применения методов тензорного исчисления, которые лежат в основе математического аппарата кристаллофизики. В математике разработаны два подхода к формулировке тензорной алгебры. Это матричный, или координатный метод представления векторных и тензорных функций, на протяжении многих лет главенствующий в теоретической физике, и исторически более ранний бескоординатный метод, долгое время остававшийся в тени.

Несомненные преимущества бескоординатных методов при постановке и анализе многих задач кристаллофизики впервые продемонстрировал Ф. И. Федоров [16–18]. Этот же подход характерен и для монографии [15]. Работы Федорова, по существу, возродили интерес к бескоординатным представлениям тензоров не только среди специалистов в области физики кристаллов, но и математиков [19, 20].

В тех случаях, когда для полного решения той или иной задачи достаточно одной координатной системы, аналитическая мощность обоих представлений примерно одинакова. Однако, такие случаи относятся к „классическим“ и в практике современной теоретической кристаллофизики достаточно редки. Ф. И. Федоров, например, показал [16, 17], что при постановке задачи о преломлении плоской электромагнитной волны на границе раздела двух анизотропных сред приходится делать выбор между несколькими системами координат.

Необходимость и невозможность в общем случае разумного выбора единой координатной системы практически заводит задачу отражения и преломления волны при ее матричной постановке в тупик. По этой причине на языке координатных представлений в общем виде эта задача не ставилась и не была решена. Бескоординатные представления позволяют легко обойти указанные трудности [17]. В акустооптике ситуация значительно сложнее. В координатном представлении каждая из парциальных волн набора дифракционных максимумов требует своей координатной системы. Это одна из причин относительно слабого развития теории анизотропной дифракции, последовательное изложение которой возможно только на языке бескоординатных представлений тензоров. Сказанное позволяет понять, почему в основу математического аппарата этой книги авторы положили бескоординатный метод записи тензоров и операций над ними.

В книге используется символика записи, отличная от символики работ [15–18]. Впервые эта символика предложена в статье [21]. Она близка к символике определения операций, несколько позже использованной в аналогичных целях Нельсоном [22]. Отказ от апробированных форм представления операций, примененных в [15, 16–18] или [19–20], объясняется рядом причин. Нам в дальнейшем придется использовать ковариантную, контрвариантную и смешанную формы представления тензоров, что было бы невозможным в рамках символики работ [15–18] или затруднительно, если следовать работам [19, 20].

В этом разделе приведен достаточно полный набор определений и основных формул использованной алгебры, который позволяет читать и понимать все последующие выкладки. Материал составлен таким образом, что каких-либо специальных знаний по тензорному исчислению от читателя не требуется. Достаточно начальных сведений по общевузовскому курсу аналитической геометрии. Удобно и то, что в основе математического аппарата лежат простые, легко запоминающиеся правила.

Формулируя соотношения, мы старались выделить и подчеркнуть те, которые позволяют наметить связь математического аппарата книги с традиционным координатным представлением. Поскольку книга посвящена конкретным задачам акустооптики, а не ее математическому аппарату, последний приведен без строгих доказательств формулируемых положений.

Рассмотрим три вектора $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$, которые пока считаем некомпланарными, а в остальном произвольными. Известно, что три некомпланарных и, следовательно, линейно независимых вектора могут использоваться как базис некоторого векторного пространства [23]. При этом инвариантное определение основных операций над векторными полями, независимое от произвола выбора $\vec{\xi}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, возможно, если использовать второй базис, сопряженный $\vec{\xi}_i$. Базис $\vec{\xi}_i$ назовем ковариантным, сопряженный ему $\tilde{\vec{\xi}}_i$ — контрвариантным.

Тройку векторов $\tilde{\vec{\xi}}_i$ контрвариантного базиса определяют следующим образом. Строят вектор $\tilde{\vec{\xi}}_1$ ортогонально векторам $\vec{\xi}_3$ и $\vec{\xi}_2$, $\tilde{\vec{\xi}}_1$ — векторам $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_3$, а $\tilde{\vec{\xi}}_3$ — векторам $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$. Длину векторов $\tilde{\vec{\xi}}_i$ выбирают так, чтобы модули соответствующих векторов ковариантного и контрвариантного базисов были величинами обратными: $|\tilde{\vec{\xi}}_i| = |\vec{\xi}_i|^{-1}$. При указанном выборе ковариантный и контрвариантный базисы оказываются взаимноортогональными. Скалярные произведения соответствующих базисных векторов удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\tilde{\vec{\xi}}_i \vec{\xi}_j = \delta_{ij} \tag{1.1.1}$$

где δ_{ij} — символы Кронеккера; $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Произвольный вектор $\vec{x}$ может быть разложен по базисам $\vec{\xi}_i$ и $\tilde{\vec{\xi}}_i$: $x_i = \left(\vec{\xi}_i \vec{x}\right)$; $\tilde{x}_i = \left(\tilde{\vec{\xi}}_i \vec{x}\right)$. В скобки здесь взяты соответствующие скалярные произведения. Координаты x_i называют ковариантными, а $\tilde{x}_i$ — контрвариантными координатами вектора $\vec{x}$ по отношению к базисам $\vec{\xi}_i$, $\tilde{\vec{\xi}}_i$ косоугольной системы координат.

Рассмотрим два произвольных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Скалярное произведение этих векторов можно определить следующим образом:

$$(\vec{x}\vec{y}) = \tilde{\vec{x}}\vec{y} = \sum_{i,j} \tilde{x}_i y_j \tilde{\vec{\xi}}_i \vec{\xi}_j = \sum_i \tilde{x}_i y_i = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \alpha_{\vec{x}\vec{y}}\,, \tag{1.1.2}$$

где знак „˜“ над вектором $\tilde{\vec{x}}$ указывает, что в (1.1.2) он представлен в контрвариантной форме. При переходе от третьего к четвертому из равенств (1.1.2) использовано соотношение ортогональности (1.1.1). Последнее из равенств соответствует обычному инвариантному определению скалярного произведения, причем $\alpha_{\vec{x}\vec{y}}$ — угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Для однозначного определения алгебры рассматриваемых линейных векторных пространств традиционные правила суммирования $a\vec{x}+b\vec{y} = \sum_i (ax_i + by_i)\, \vec{\xi}_i$; $a\tilde{\vec{x}} + b\tilde{\vec{y}} = \sum_i (a\tilde{x}_i + b\tilde{y}_i)\, \tilde{\vec{\xi}}_i$ следует дополнить правилом образования скалярного произведения. Это произведение определим следующим образом: *два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ образуют скалярное произведение в том и только в том случае, когда слева стоит контрвариантный вектор, а справа ковариантный: $\tilde{\vec{x}}\vec{y}$.*

Кроме скалярного $\tilde{\vec{x}}\vec{y}$ возможны еще три типа произведений двух векторных функций: $\vec{x}\tilde{\vec{y}}$, $\vec{x}\vec{y}$, $\tilde{\vec{x}}\tilde{\vec{y}}$, являющиеся соответственно смешанной, ковариантной и контрвариантной формой тензорных произведений-диад двух векторов. Четыре произведения: скалярное и три диады образуют полную группу афинных произведений, лежащих в основе алгебры линейных векторных пространств. Символика работ [15–18] позволяет использовать только одну форму произведения-диады — смешанную, в наших обозначениях это $\vec{x}\tilde{\vec{y}}$. Применение ковариантной и контрвариантной форм позволило расширить формы представления произведений-диад, что существенно увеличивает мощность математического аппарата.

Произведения-диады, как будет видно из дальнейшего, являются простейшими тензорами и лежат в основе определения тензоров и операторов общего вида.

В дальнейшем мы будем использовать как базисные только ортогональные тройки или триплеты векторов, нормированных по длине. В этом случае ковариантный $\vec{\xi}_i$ и контрвариантный $\vec{\tilde{\xi}}_i$ базисы геометрически совмещаются. Одинаковыми оказываются и ковариантные и контрвариантные координаты $x_i = \tilde{x}_i$. При этом обычно перестают различать ковариантную и контрвариантную формы представления самих векторов. Однако мы сохраним это различие, хотя оно в общем будет сводиться к формальному признаку (знаку тильды ˜ над соответствующим вектором). Заметим, что в матричном представлении различие векторов неформально даже для нормированных ортогональных базисов. Действительно, сопряженным вектору, представленному матрицей с одним столбцом, является вектор-матрица с одной строкой. Скалярное произведение векторов-матриц записывается следующим образом:

$$\vec{\tilde{x}}\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \,. \tag{1.1.3}$$

Произведение (1.1.3) определено в строгом соответствии с известными правилами перемножения прямоугольных матриц [23]. В соответствии с этими правилами не сводятся к скаляру произведения $\vec{x}\vec{\tilde{y}}$, $\vec{x}\vec{y}$, $\vec{\tilde{x}}\vec{\tilde{y}}$, которые могут быть представлены только с помощью матриц. Этот пример показывает, что матричный аппарат не противоречит определенной выше алгебре и может в случае необходимости включаться в эту алгебру.

Известно, что любой тензор может быть однозначно разложен на совокупность простейших проекционных операторов и представлен с их помощью. Поэтому прежде всего определим вид проекционных операторов. Пусть единичный вектор $\vec{\chi}$ задает некоторое выделенное в пространстве направление, тогда скалярное произведение $\vec{\tilde{\chi}}\vec{x}$ определяет длину проекции вектора $\vec{x}$ на направление $\vec{\chi}$, а вектор-проекция может быть записан в виде $\vec{x}_\parallel = \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}\vec{x}$. Таким образом, произведение-диада $\vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}$ является проекционным оператором, осуществляющим проекцию произвольного вектора на направление $\vec{\chi}$. Рассмотрим теперь следующую функцию: $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_\parallel = \left(\mathbf{1} - \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}\right)\vec{x}$. С помощью простых геометрических построений несложно убедиться, что вектор $\vec{x}_\perp$ ортогонален $\vec{\chi}$ и, следовательно, лежит в плоскости, для которой $\vec{\chi}$ является нормалью. Это утверждение также легко доказать следующим образом: $\vec{\tilde{\chi}}\left(\mathbf{1} - \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}\right)\vec{x} = \left(\vec{\tilde{\chi}} - \vec{\tilde{\chi}}\vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}\right)\vec{x} = \vec{\chi}\vec{x}_\perp = 0$. В этих выкладках учтено, что в силу нормировки $\vec{\tilde{\chi}}\vec{\chi} = 1$. Оператор $\mathbf{1} - \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}$ осуществляет проекцию любого вектора на плоскость, нормалью которой является $\vec{\chi}$. Несложно убедиться, что оператор $\vec{\chi}_1\vec{\tilde{\chi}}_2$ осуществляет проекцию-перенос. Таким образом мы определили три типа простейших проекционных операторов:

$$\mathbf{\Pi}_\parallel = \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}; \qquad \mathbf{\Pi}_\perp = \mathbf{1} - \vec{\chi}\vec{\tilde{\chi}}; \qquad \mathbf{\Pi}_{12} = \vec{\chi}_1\vec{\tilde{\chi}}_2 \,. \tag{1.1.4}$$

Заметим, что $\mathbf{\Pi}_\parallel$ является частным случаем проекции-переноса: $\mathbf{\Pi}_\parallel = \mathbf{\Pi}_{12}$, если $\vec{\chi}_1 = \vec{\chi}_2$.

Операторы $\bar{\mathbf{\Pi}}_{12} = \vec{\chi}_1\vec{\chi}_2$; $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{12} = \vec{\tilde{\chi}}_1\vec{\tilde{\chi}}_2$ определяют ковариантную и контрвариантную формы проекции-переноса, осуществляемую с изменением представления вектора: $\vec{\tilde{x}}_{12} = \tilde{\mathbf{\Pi}}_{12}\vec{x}$; $\vec{x}_{12} = \vec{\tilde{x}}\,\bar{\mathbf{\Pi}}_{12}$. Оператор $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{12}$ действует как проекционный оператор только на вектор, стоящий справа, $\bar{\mathbf{\Pi}}_{12}$ — только на вектор, стоящий слева. Оператор смешанного вида $\mathbf{\Pi}_{12}$ действует на векторы, стоящие и слева и справа от него: $\vec{\tilde{x}}_{12} = \vec{\tilde{x}}\,\mathbf{\Pi}_{12}$; $\vec{x}_{12} = \mathbf{\Pi}_{12}\vec{x}$. Очевидно, что все сказанное относится и к $\mathbf{\Pi}_{\parallel}$. Прежде, чем определить ковариантную и контрвариантную формы оператора $\mathbf{\Pi}_{\perp}$, необходимо рассмотреть еще одну фундаментальную операцию: тождественное преобразование. Пусть $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3$ — нормированный ортогональный базис, — тогда операторы тождественного преобразования или единичные операторы (тензоры) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1} = \sum_i \vec{\xi}_i\vec{\tilde{\xi}}_i = \vec{\xi}_1\vec{\tilde{\xi}}_1 + \vec{\xi}_2\vec{\tilde{\xi}}_2 + \vec{\xi}_3\vec{\tilde{\xi}}_3\,; \\ &\tilde{\mathbf{1}} = \sum_i \vec{\tilde{\xi}}_i\vec{\tilde{\xi}}_i\,; \qquad\qquad \bar{\mathbf{1}} = \sum_i \vec{\xi}_i\vec{\xi}_i\,. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Рассмотрим такие преобразования: $\mathbf{1}\vec{x} = \sum\limits_i \vec{\xi}_i\vec{\tilde{\xi}}_i\vec{x} = \sum\limits_i \vec{\xi}_i x_i \equiv \vec{x}$, где $x_i = \vec{\tilde{\xi}}_i\vec{x}$ — координаты вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{\xi}_i$. Приведенные преобразования, из которых становится очевидным тождество $\mathbf{1}\vec{x} \equiv \vec{x}$, указывают еще на одну функцию единичного оператора: он осуществляет разложение произвольного вектора по векторам базиса, относительно которого определен. С помощью формул (1.1.5) можно найти ковариантное и контрвариантное представления оператора $\mathbf{\Pi}_{\perp}$: $\bar{\mathbf{\Pi}}_{\perp} = \bar{\mathbf{1}} - \vec{\chi}\vec{\chi}$; $\tilde{\mathbf{\Pi}}_{\perp} = \tilde{\mathbf{1}} - \vec{\tilde{\chi}}\vec{\tilde{\chi}}$.

Пусть вектор $\vec{x} = \sum\limits_i x_i\vec{\xi}_i$ определен относительно базиса $\vec{\xi}_i$. Рассмотрим второй базис $\vec{\xi}{}'_i$, направляющие косинусы векторов которого относительно базиса $\vec{\xi}_i$ считаем известными: $\vec{\tilde{\xi}}{}'_i\vec{\xi}_j = \alpha_{ij}$. Выполним следующие преобразования, используя единичную операцию:

$$\vec{x} = \sum_j x_j\vec{\xi}_j = \mathbf{1}\vec{x} = \sum_{i,j} \vec{\xi}{}'_i\vec{\tilde{\xi}}{}'_i\vec{\xi}_j x_j = \sum_{i,j} \alpha_{ij}x_j\vec{\xi}{}'_i = \sum_i x'_i\vec{\xi}{}'_i\,. \tag{1.1.6}$$

В четвертой и пятой формулах цепочки преобразований (1.1.6) мы воспользовались тем, что скалярные функции подчиняются правилу коммутации и их можно переставлять произвольным образом. Преобразования (1.1.6) очевидны и полностью следуют из определенных выше правил, образующих рассматриваемую векторную алгебру. Сравнивая последнюю и предпоследнюю формулы, можно заметить, что при переходе от базиса $\vec{\xi}_i$ к $\vec{\xi}{}'_j$ координаты векторов в нашей алгебре преобразуются по обычному правилу $x'_i = \sum\limits_j \alpha_{ij}x_j$. Подчеркнем одно существенное обстоятельство. В координатных методах такое преобразование определяет совокупность трех скалярных функций x_i как координат некоторого вектора. По этой причине оно вводится как определение в круг правил алгебры векторного пространства. Здесь же оно — простое следствие из операции тождественного преобразования (1.1.5).

Рассмотрим два вектора $\vec{x} = \sum\limits_i x'_i\vec{\xi}{}'_i$ и $\vec{y} = \sum\limits_j y_j\vec{\xi}_j$, заданных относительно различных базисов. В рамках координатных методов для вычисления скалярного произведения этих векторов их координаты необходимо привести к одному и тому же базису и только после этого составить сумму произведений их одноименных координат. В рассматриваемой алгебре этого можно не делать и сразу же записать:

$$\vec{\tilde{x}}\vec{y} = \sum_{i,j} x_i' y_j \vec{\tilde{\xi}}_i' \vec{\xi}_j = \sum_{i,j} \alpha_{ij} x_i' y_j \,.$$

Любой тензор-оператор можно представить следующим образом:

$$\mathbf{g} = \sum_{i_m, j_n} g_{i_m j_n} \vec{\xi}_{i_m} \vec{\tilde{\xi}}_{j_n} = \sum_{i_1 \ldots i_M, j_1 \ldots j_N} g_{i_1 \ldots i_M j_1 \ldots j_N} \vec{\xi}_{i_1} \ldots \vec{\xi}_{i_M} \vec{\tilde{\xi}}_{j_1} \ldots \vec{\tilde{\xi}}_{j_N} \,. \tag{1.1.7}$$

Тензор (1.1.7) определен как тензор смешанного типа $(M+N)$-го ранга. При $N=0$ мы получим полностью ковариантную форму представления, при $M=0$ — контрвариантную. Несложно заметить, что рассмотренные выше проекционные операторы (1.1.4) и единичные тензоры (1.1.5) являются частными случаями определения тензора (1.1.7). Трехмерный тензор второго ранга смешанного типа имеет вид:

$$\mathbf{g} = \sum_{i,j} g_{ij} \vec{\xi}_i \vec{\tilde{\xi}}_j \,. \tag{1.1.8}$$

Координаты тензора (1.1.8) относительно базиса $\vec{\xi}_m'$ вычисляются по формулам:

$$g_{mn}' = \vec{\tilde{\xi}}_m' \mathbf{g} \vec{\xi}_n' = \sum_{i,j} g_{ij} \vec{\tilde{\xi}}_m' \vec{\xi}_i \vec{\tilde{\xi}}_j \vec{\xi}_n' = \sum_{i,j} \alpha_{mi} \alpha_{nj} g_{ij} \,. \tag{1.1.9}$$

Тензоры называются симметричными по какой-либо паре индексов, если при перестановке этих индексов они не изменяются, и антисимметричными, если такая перестановка изменяет их знак. Симметрия тензора относится к его инвариантным характеристикам и не зависит от выбора базиса. Существуют особые, называемые главными, системы координат, в которых симметричные тензоры второго ранга с действительными координатами приобретают особенно простой канонический вид. Эту систему координат можно найти, решая характеристическое уравнение $\mathbf{g}\vec{\xi}_0 = \lambda\vec{\xi}_0$ или в координатном представлении:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} (g_{11}-\lambda)\xi_{01}+ & g_{12}\xi_{02}+ & g_{13}\xi_{03} = 0\,; \\ g_{21}\xi_{01}+ & (g_{22}-\lambda)\xi_{02}+ & g_{23}\xi_{03} = 0\,; \\ g_{31}\xi_{01}+ & g_{32}\xi_{02}+ & (g_{33}-\lambda)\xi_{03} = 0\,, \end{array} \right. \tag{1.1.10}$$

где $\xi_{0i} = \vec{\tilde{\xi}}_i \vec{\xi}_0$ — координаты отыскиваемого базисного вектора $\vec{\xi}_0$ главной системы координат. Если равен нулю определитель (1.1.10), то система линейных однородных уравнений относительно ξ_{0i} разрешима.

$$\begin{aligned} \det\left(g_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = {} & -\lambda^3 + (g_{11}+g_{22}+g_{33})\lambda^2 - \\ & - (g_{11}g_{22} + g_{11}g_{33} + g_{22}g_{33} - g_{12}^2 - g_{13}^2 - g_{23}^2)\lambda + \\ & + (g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{13}g_{23} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2 - g_{33}g_{12}^2) = 0\,. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

При записи уравнения (1.1.11) учтена симметрия тензора: $g_{ij} = g_{ji}$. Это кубическое уравнение, три корня которого λ_1, λ_2, λ_3 являются главными значениями симметричного тензора $\mathbf{g}$. Подставляя найденные из уравнения (1.1.11) λ_i в (1.1.10), можно найти три вектора $\vec{\xi}_{01}$, $\vec{\xi}_{02}$, $\vec{\xi}_{03}$. Эти векторы взаимноортогональны и образуют базис главной системы координат тензора. В этой системе тензор $\mathbf{g}$ приобретает вид:

$$\mathbf{g} = \lambda_1 \vec{\xi}_{01}\vec{\vec{\xi}}_{01} + \lambda_2 \vec{\xi}_{02}\vec{\vec{\xi}}_{02} + \lambda_3 \vec{\xi}_{03}\vec{\vec{\xi}}_{03}\,. \tag{1.1.12}$$

Определим еще одну важную операцию — произведение тензоров. Воспользовавшись общим определением (1.1.7), получим

$$\mathbf{gq} = \sum_{i_1\ldots i_M, j_1\ldots j_N, u_1\ldots u_R, v_1\ldots v_S} g_{i_1\ldots i_M j_1\ldots j_N} q_{u_1\ldots u_R v_1\ldots v_S} \times \\ \times \vec{\xi}_{i_1}\ldots\vec{\xi}_{i_M}\vec{\vec{\xi}}_{j_1}\ldots\vec{\vec{\xi}}_{j_N}\vec{\xi}_{u_1}\ldots\vec{\xi}_{u_R}\vec{\vec{\xi}}_{v_1}\ldots\vec{\vec{\xi}}_{v_S}\,. \tag{1.1.13}$$

Из (1.1.13) видно, что скалярные произведения могут образовывать только векторы контрвариантной группы тензора, стоящего слева $\left(\vec{\vec{\xi}}_{j_1}\ldots\vec{\vec{\xi}}_{j_N}\right)$ и ковариантной группы тензора, стоящего справа $\left(\vec{\xi}_{u_1}\ldots\vec{\xi}_{u_R}\right)$. Образование скалярных пар автоматически означает свертку тензоров по соответствующим индексам.

С тем, чтобы пояснить основные приемы вычисления произведений тензоров, рассмотрим относительно простые примеры. Пусть $\mathbf{g}$ и $\mathbf{q}$ — тензоры второго ранга смешанного типа.

$$\mathbf{gq} = \sum_{i,j,m,n} g_{ij} q_{mn} \vec{\xi}_i \vec{\vec{\xi}}_j \vec{\xi}_m \vec{\vec{\xi}}_n = \sum_{i,j,m,n} g_{ij} q_{mn} \delta_{jm} \vec{\xi}_i \vec{\vec{\xi}}_n = \sum_{i,j,n} g_{ij} q_{jn} \vec{\xi}_i \vec{\vec{\xi}}_n\,. \tag{1.1.14}$$

При записи равенств (1.1.14) было использовано условие ортогональности (1.1.1). Ортогональность векторов базиса ведет к свертке координат $g_{ij}q_{jn}$ по индексу j. Если в произведении $\mathbf{gq}$ стоящий слева тензор контрвариантный $\left(\mathbf{g} = \sum g_{ij}\vec{\vec{\xi}}_i\vec{\vec{\xi}}_j\right)$, а справа — ковариантный $\left(\mathbf{q} = \sum q_{mn}\vec{\xi}_m\vec{\xi}_n\right)$, то в произведении осуществляется свертка по обоим индексам:

$$\mathbf{gq} = \sum_{i,j,m,n} g_{ij} q_{mn} \vec{\vec{\xi}}_i \vec{\vec{\xi}}_j \vec{\xi}_m \vec{\xi}_n = \sum_{i,j} g_{ij} q_{ij}\,. \tag{1.1.15}$$

Переставим в (1.1.15) тензоры $\mathbf{g}$ и $\mathbf{q}$ местами: $\mathbf{qg} = \sum q_{mn} g_{ij} \vec{\xi}_m \vec{\xi}_n \vec{\vec{\xi}}_i \vec{\vec{\xi}}_j$. В этом случае в произведении нет свертки ни по одному из индексов.

Из приведенных примеров видно, какую роль выполняет структурная часть тензора. Если координатная часть несет информацию о самом тензоре, то структурная часть предопределяет характер операций, в которые он может вступить. Записывая произведения (1.1.14), (1.1.15), мы использовали их разложение относительно одного и того же базиса $\vec{\xi}_i$. Это требование строго обязательно, если используются координатные методы представления тензоров. Покажем, что в случае рассматриваемых бескоординатных методов можно перемножать тензоры, определенные относительно различных базисов. Действительно,

$$\mathbf{gq} = \sum_{i,j,m,n} g'_{ij} q_{mn} \vec{\xi}'_i \vec{\vec{\xi}}'_j \vec{\xi}_m \vec{\vec{\xi}}_n = \sum_{i,j,m,n} g'_{ij} q_{mn} \alpha_{jm} \vec{\xi}'_i \vec{\vec{\xi}}_n\,, \tag{1.1.16}$$

где $\alpha_{jm} = \vec{\tilde{\xi}}{}'_j \vec{\xi}_m$ — направляющие косинусы.

Последнее из равенств (1.1.16) обладает одной особенностью, на которую следует обратить внимание: в структурную часть тензора $\mathbf{gq}$ вошли векторы $\vec{\xi}{}'_i \vec{\tilde{\xi}}_n$ различных базисов. Такие тензоры-„гибриды“ практически невозможны в рамках чисто координатных методов.

Важное место в векторной алгебре занимают векторные произведения. Векторное произведение, по существу, является операцией, которая ставит в соответствие двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ третий вектор, ортогональный обоим. Оператором векторного произведения является полный антисимметричный тензор третьего ранга, известный как тензор Леви-Чивита [15,16,23]:

$$\mathbf{L} = \left(\vec{\xi}_3 \vec{\tilde{\xi}}_2 - \vec{\xi}_2 \vec{\tilde{\xi}}_3\right) \vec{\xi}_1 + \left(\vec{\xi}_1 \vec{\tilde{\xi}}_3 - \vec{\xi}_3 \vec{\tilde{\xi}}_1\right) \vec{\xi}_2 + \left(\vec{\xi}_2 \vec{\tilde{\xi}}_1 - \vec{\xi}_1 \vec{\tilde{\xi}}_2\right) \vec{\xi}_3 \,. \tag{1.1.17}$$

Тензор Леви-Чивита сохраняет свой вид относительно любого базиса. С его помощью векторное произведение можно записать следующим образом:

$$\vec{x}^{\times} \vec{y} = \mathbf{L} \vec{x} \vec{y} \,; \qquad \vec{x}^{\times} = \mathbf{L} \vec{x} \,. \tag{1.1.18}$$

Вторая из формул (1.1.18) определяет дуальный вектор $\vec{x}^{\times}$. Воспользовавшись тензором (1.1.17), можно доказать следующие соотношения, связанные с двойным векторным произведением:

$$\vec{x}^{\times} \vec{y}^{\times} \vec{z} = \mathbf{L} \vec{x} \, \mathbf{L} \vec{y} \vec{z} = \vec{y} \vec{\tilde{x}} \vec{z} - \vec{\tilde{y}} \vec{x} \vec{z} = \left(\vec{y} \vec{\tilde{x}} - \vec{\tilde{y}} \vec{x}\right) \vec{z} \,; \qquad \vec{x}^{\times} \vec{y}^{\times} = \vec{y} \vec{\tilde{x}} - \vec{\tilde{y}} \vec{x} \,. \tag{1.1.19}$$

Для того, чтобы завершить краткое изложение математического аппарата книги, определим еще одну важную группу операций: дифференциальные векторные операции. В ковариантной и контрвариантной форме дифференциальный векторный оператор записывается следующим образом:

$$\nabla = \sum_i \vec{\xi}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \,; \qquad \tilde{\nabla} = \sum_i \vec{\tilde{\xi}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \,. \tag{1.1.20}$$

Несложно убедиться, что с помощью операторов (1.1.20) можно представить все известные дифференциальные операторы векторной алгебры:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad} = \nabla \,; \qquad \mathrm{div} = \tilde{\nabla} \,; \qquad \mathrm{rot} = \mathbf{L} \nabla = \nabla^{\times} \,; \\
&\Delta = \tilde{\nabla} \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \,; \\
&\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \nabla^{\times} \nabla^{\times} = \nabla \tilde{\nabla} - \tilde{\nabla} \nabla \,.
\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

При записи последнего выражения были использованы соотношения (1.1.19).

При изучении тензорного анализа в его традиционной координатной форме, кроме фундаментальных правил, задающих алгебру векторных пространств, следует помнить набор правил, определяющих преобразование координат при переходе от одной системы к другой, правил свертки тензоров при вычислении произведений и т.п. Из выражений, приведенных выше, видно, что перечисленные правила в рассматриваемый математический аппарат вводятся автоматически. Все они фактически являются следствием единственного правила образования скалярного произведения и лежащего в основе математического аппарата соотношения ортогональности (1.1.1). Поэтому при работе с математическим аппаратом этой книги, чтении приведенных формул и проведении промежуточных выкладок следует прежде всего помнить основное и легко запоминающееся правило образования скалярной функции $\tilde{\vec{x}}\vec{y}$.

1.2 Плоские электромагнитные волны в кристаллах

Электромагнитное поле в любой среде может быть задано векторами электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей, а также электрической $\vec{D}$ и магнитной $\vec{B}$ индукции. Эти изменяющиеся во времени и пространстве векторные функции связаны уравнениями Максвелла. Для среды, в которой отсутствуют токи и свободные заряды, уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla^{\times}\vec{H} = (\partial/\partial t)\,\vec{D}\,; \qquad \nabla^{\times}\vec{E} = -\,(\partial/\partial t)\,\vec{B}\,; \qquad \tilde{\nabla}\vec{D} = 0\,; \qquad \tilde{\nabla}\vec{B} = 0\,. \tag{1.2.1}$$

Влияние среды на электромагнитную волну учитывается материальными уравнениями, которыми должны быть дополнены уравнения (1.2.1). Упругооптические среды, как правило, относятся к немагнитным $(\mu = 1)$. В таких средах $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$. Связь векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ может быть определена с помощью одного из следующих уравнений:

$$\varepsilon_0\vec{E} = \boldsymbol{\varkappa}\vec{D}\,; \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}\vec{E}\,, \tag{1.2.2}$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}$ К^2/Н м^2 — электрическая постоянная; $\mu_0 = 4\times10^{-7}$ Н/Э^2 — магнитная проницаемость вакуума; $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры диэлектрической непроницаемости и проницаемости среды соответственно. Эти тензоры взаимообратны: $\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{1}$.

Наиболее важным классом решений уравнений (1.2.1), (1.2.2) являются гармонические плоские волны:

$$\begin{gathered}\vec{D} = \vec{D}_0 \exp j\varphi\,; \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 \exp j\varphi\,; \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp j\varphi\,; \\ \varphi = \tilde{\vec{k}}\vec{x} - \omega t = (2\pi/\lambda)\,\tilde{\vec{n}}\vec{x} - \omega t\,,\end{gathered} \tag{1.2.3}$$

где $\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{H}_0$ — соответствующие амплитуды, в общем случае комплексные, ω, λ — циклическая частота и длина волны света в вакууме, связанные соотношением $\lambda\omega = 2\pi c$; c — скорость света в вакууме; $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\,\vec{n}$ — волновой вектор, $\vec{n} = n\vec{d}_0$ — вектор фазовой рефракции, $\vec{d}_0$ — волновая нормаль $\left(\tilde{\vec{d}}_0\vec{d}_0 = 1\right)$, n — коэффициент преломления. Подставляя (1.2.3) в (1.2.1) и учитывая, что $\nabla^{\times}\exp\left(j\tilde{\vec{k}}\vec{x}\right) = j\vec{k}^{\times}\exp\left(j\tilde{\vec{k}}\vec{x}\right)$ и $\tilde{\nabla}\exp\left(j\tilde{\vec{k}}\vec{x}\right) = j\tilde{\vec{k}}\exp\left(j\tilde{\vec{k}}\vec{x}\right)$, получим

$$c\vec{D} = -\vec{n}^{\times}\vec{H}\,; \qquad c\mu_0\vec{H} = \vec{n}^{\times}\vec{E}\,; \qquad \tilde{\vec{d}}_0\vec{D} = 0\,; \qquad \tilde{\vec{d}}_0\vec{H} = 0\,. \tag{1.2.4}$$

Если прозрачная анизотропная среда не является оптически активной, то тензоры $\boldsymbol{\varkappa}, \boldsymbol{\varepsilon}$ симметричны и в главной системе координат анизотропной среды могут быть представлены в форме:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varkappa} = N_1^{-2}\vec{\xi}_{01}\tilde{\vec{\xi}}_{01} + N_2^{-2}\vec{\xi}_{02}\tilde{\vec{\xi}}_{02} + N_3^{-2}\vec{\xi}_{03}\tilde{\vec{\xi}}_{03}\,; \\ &\boldsymbol{\varepsilon} = N_1^{2}\vec{\xi}_{01}\tilde{\vec{\xi}}_{01} + N_2^{2}\vec{\xi}_{02}\tilde{\vec{\xi}}_{02} + N_3^{2}\vec{\xi}_{03}\tilde{\vec{\xi}}_{03}\,, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

где N_1, N_2, N_3 — главные коэффициенты преломления среды, $\vec{\xi}_{0i}$ — базис главной системы координат.

Умножив второе из уравнений Максвелла (1.2.1) слева на $\nabla^{\times}$, воспользуемся первым из этих уравнений и последней из формул (1.1.21). После указанных преобразований приходим к волновому уравнению

$$-\nabla^{\times}\nabla^{\times}\vec{E} = \left(\tilde{\nabla}\nabla - \nabla\tilde{\nabla}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D}\,; \qquad \tilde{\nabla}\vec{D} = 0\,. \tag{1.2.6}$$

Из волнового уравнения (1.2.6) можно исключить $\vec{E}$ или $\vec{D}$ с помощью соответствующего материального уравнения (1.2.2). Для однородных сред волновые уравнения относительно $\vec{E}$ или $\vec{D}$ эквивалентны. Следует, однако, помнить, что в неоднородных средах, к числу которых относятся и возмущенные ультразвуком акустооптические среды, волновые уравнения относительно $\vec{E}$ или $\vec{D}$ могут оказаться неэквивалентными.

С помощью первого из материальных уравнений (1.2.2) исключим из (1.2.6) вектор $\vec{E}$:

$$\left(\tilde{\nabla}\nabla - \nabla\tilde{\nabla}\right)\boldsymbol{\varkappa}\vec{D} = c^{-2}\left(\partial^2/\partial t^2\right)\vec{D}\,; \qquad \tilde{\nabla}\vec{D} = 0\,. \tag{1.2.7}$$

При заданной волновой нормали плоской волны $\vec{d}_0$ уравнению (1.2.7) удовлетворяют два вектора. Поэтому ищем указанные решения в виде функции $\vec{D}_\alpha = \vec{d}_\alpha D_{0\alpha}\exp j\varphi_\alpha$, где $D_{0\alpha}$ — амплитуда волны, $\vec{d}_\alpha$ — нормированный вектор индукции $\left(\tilde{\vec{d}}_\alpha\vec{d}_\alpha = 1\right)$. В дальнейшем векторы $\vec{d}_\alpha$ будем называть векторами поляризации плоской волны. Индексы $\alpha = \pm 1$ указывают, к какому из двух возможных решений относится рассматриваемое. Подставив (1.2.3) в (1.2.7) и учитывая сделанные выше замечания, находим

$$\left(\tilde{\vec{k}}_\alpha\vec{k}_\alpha - \vec{k}_\alpha\tilde{\vec{k}}_\alpha\right)\boldsymbol{\varkappa}\vec{d}_\alpha = \omega^2 c^{-2}\vec{d}_\alpha\,; \qquad \tilde{\vec{k}}_\alpha\vec{d}_\alpha = 0\,.$$

Поскольку $\vec{k}_\alpha = (2\pi/\lambda)\,\vec{n}_\alpha\,,\ \omega/c = 2\pi/\lambda\,,\ \tilde{\vec{d}}_0\vec{d}_0 = 1$, это уравнение легко приводится к уравнению:

$$\left(\mathbf{1} - \vec{d}_0\tilde{\vec{d}}_0\right)\boldsymbol{\varkappa}\vec{d}_\alpha = n_\alpha^{-2}\vec{d}_\alpha\,; \qquad \tilde{\vec{d}}_0\vec{d}_\alpha = 0\,. \tag{1.2.8}$$

Умножая слева (1.2.8) на $\tilde{\vec{d}}_\beta$ и учитывая условие поперечности $\tilde{\vec{d}}_\beta\vec{d}_0 = 0$, получим $\tilde{\vec{d}}_\beta\boldsymbol{\varkappa}\vec{d}_\alpha = n_\alpha^{-2}\tilde{\vec{d}}_\beta\vec{d}_\alpha$. Тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ симметричен, поэтому в последнем соотношении векторы $\vec{d}_\beta$ и $\vec{d}_\alpha$ можно менять местами. Вычтя из выражения, записанного для $\alpha = 1$ и $\beta = -1$, выражение, записанное для $\alpha = -1$, $\beta = 1$, получим: $\left(n_1^{-2} - n_{-1}^{-2}\right)\tilde{\vec{d}}_1\vec{d}_{-1} = 0$. Отсюда следует, что при $n_1 \neq n_{-1}$ векторы $\vec{d}_{\pm 1}$

должны быть ортогональны: $\vec{\tilde{d}}_1 \vec{d}_{-1} = 0$. Из ортогональности векторов поляризации $\vec{d}_{\pm 1}$ также вытекает:

$$\vec{\tilde{d}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_{-\alpha} = 0\,; \qquad \vec{\tilde{d}}_\alpha \vec{d}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{1.2.9}$$

Векторы $\vec{d}_0$ и $\vec{d}_{\pm 1}$ образуют собственный триплет волны или тот естественный базис, по отношению к которому уравнения распространения волны приобретают наиболее простую форму.

Уравнения (1.2.8) позволяют найти для заданной волновой нормали $\vec{d}_0$ собственные векторы поляризации $\vec{d}_{\pm 1}$ и соответствующие им коэффициенты преломления $n_{\pm 1}$. Обычно, используя вспомогательный базис $\vec{\xi}_i$, в котором вектор $\vec{\xi}_3$ совпадает с $\vec{d}_0$, записывают уравнения вида (1.2.8) в координатном представлении базиса $\vec{\xi}_i$ и переходят таким образом к системе из двух однородных уравнений [15]. Собственные значения матрицы этой системы определяют коэффициенты преломления, а соответствующие им решения определяют координаты векторов $\vec{d}_{\pm 1}$. Мы рассмотрим здесь другой метод расчета характеристик плоской волны, предложенный в [21, 24], используя в качестве исходных уравнения (1.2.9).

Выберем вспомогательный базис $\vec{\xi}_{\pm 1,0}$ так, что $\vec{\xi}_0 = \vec{d}_0$. Поскольку $\vec{d}_{\pm 1}$ ортогональны $\vec{d}_0$ и следовательно $\vec{\xi}_0$, их можно представить с помощью векторов $\vec{\xi}_{\pm 1}$:

$$\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_\alpha \cos\theta + \alpha \vec{\xi}_{-\alpha} \sin\theta\,, \tag{1.2.10}$$

где $\alpha = \pm 1$. Подставим эти векторы в соотношение (1.2.9). Введя обозначения $\varkappa_{\alpha\beta} = \vec{\tilde{\xi}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa} \vec{\xi}_\beta$, найдем

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2\varkappa_{-1,1} / \left(\varkappa_{11} - \varkappa_{-1,-1}\right)\,. \tag{1.2.11}$$

Умножив слева (1.2.8) на $\vec{\tilde{d}}_\alpha$, находим решения, определяющие коэффициенты преломления

$$n_\alpha^{-2} = \vec{\tilde{d}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha = \varkappa_{\alpha\alpha} \cos^2\theta + \varkappa_{-\alpha,-\alpha} \sin^2\theta + \alpha \varkappa_{\alpha,-\alpha} \sin 2\theta\,. \tag{1.2.12}$$

Матричные элементы тензора диэлектрической непроницаемости $\boldsymbol{\varkappa}$ по базису $\vec{\xi}_{\pm 1,0}$ вычисляются, исходя из (1.2.5):

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \vec{\tilde{\xi}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa} \vec{\xi}_\beta = \sum_i N_i^{-2} \vec{\tilde{\xi}}_\alpha \vec{\xi}_{0i} \vec{\tilde{\xi}}_{0i} \vec{\xi}_\beta = \sum_i N_i^{-2} \cos\theta_{\alpha i} \cos\theta_{\beta i}\,, \tag{1.2.13}$$

где $\cos\theta_{\alpha i} = \vec{\tilde{\xi}}_\alpha \vec{\xi}_{0i}$ — направляющие косинусы векторов $\vec{\xi}_{\pm 1}$ вспомогательного базиса по отношению к осям $\vec{\xi}_{0i}$ главной системы координат. Таким образом, зная ориентацию векторов $\vec{\xi}_{\pm 1}$ в главной системе координат, по формулам (1.2.10), (1.2.12), можно рассчитать векторы $\vec{d}_{\pm 1}$, а затем и коэффициенты преломления. Единственным условием, ограничивающим выбор $\vec{\xi}_{\pm 1,0}$, является $\vec{\xi}_0 = \vec{d}_0$. Однако при проведении конкретных расчетов можно рекомендовать следующее правило выбора $\vec{\xi}_{\pm 1}$. Один из этих векторов удобно выбрать так, чтобы он лежал в одной плоскости с волновым вектором $\vec{d}_0$ и какой-либо из осей главной системы координат $\vec{\xi}_{0i}$. Второй вектор поляризации будет ортогонален этой плоскости. В соответствии с указанным правилом

$$\vec{\xi}_0 = \vec{d}_0\,; \qquad \vec{\xi}_\alpha = \frac{\vec{d}_0{\times}\vec{\xi}_{0i}}{\sqrt{1-\left(\tilde{\vec{\xi}}_{0i}\vec{d}_0\right)^2}}\,; \qquad \vec{\xi}_{-\alpha} = \alpha\vec{\xi}_\alpha{\times}\vec{d}_0\,. \tag{1.2.14}$$

Обычно конкретные значения индексов поляризации выбираются по формальному признаку; при этом считается, что конкретное содержание решений от использованного правила выбора индексов не зависит. Однако в работе [25] было показано, что такой подход к выбору индексов поляризации в принципе неверен. В параметрических средах положение оптических осей зависит от внешнего поля. В тех случаях, когда наведенная оптическая ось проходит через вектор $\vec{d}_0$ при формальном выборе возможна переиндексация, которая может привести к появлению в соответствующих решениях разрывов, не имеющих физического смысла. Чтобы избежать вероятных ошибок, следует придерживаться неформального принципа, учитывающего физические параметры волн, например, их скорость распространения. В частности, если не будет оговорено иного, мы в дальнейшем будем приписывать индекс 1 „быстрой“ волне, а -1 — „медленной“. Имея в виду указанное обстоятельство, мы не конкретизировали индекс в (1.2.14), поскольку, не задавая конкретного направления $\vec{d}_0$ и не зная N_i, нельзя сказать, какой волне: „быстрой“ или „медленной“ будут отвечать векторы $\vec{d}_{\pm\alpha}$.

Общие расчетные соотношения (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) относятся к случаю двуосных анизотропных сред и произвольно заданной волновой нормали $\vec{d}_0$. В важном частном случае, широко встречающемся в практике применения анизотропных оптических элементов, когда вектор $\vec{d}_0$ лежит в одной из координатных плоскостей, найденные выше решения существенно упрощаются. Пусть вектор $\vec{d}_0$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{\xi}_{0j}$, $\vec{\xi}_{0k}$ и, следовательно, ортогонален $\vec{\xi}_{0i}$ $(i \neq j \neq k)$. Несложно убедиться, используя (1.2.13), что в этом случае один из векторов поляризации $\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_{0i}$, а второй $\vec{d}_{-\alpha}$ лежит в одной плоскости с $\vec{\xi}_{0j}$, $\vec{\xi}_{0k}$ и $\vec{d}_0$.

Если $\vec{d}_0 = \vec{\xi}_{0j}\cos\theta + \vec{\xi}_{0j}\sin\theta$, то $\vec{d}_{-\alpha} = -\vec{\xi}_{0j}\sin\theta + \vec{\xi}_{0k}\cos\theta$, где θ — угол, который образует вектор $\vec{d}_0$ с вектором $\vec{\xi}_{0j}$. По формуле (1.2.12) легко определить соответствующие коэффициенты преломления:

$$\begin{aligned} n_\alpha^{-2} &= \tilde{\vec{\xi}}_{0i}\boldsymbol{\varkappa}\vec{\xi}_{0i} = N_i^{-2}\,; \\ n_{-\alpha}^{-2} &= \tilde{\vec{d}}_{-\alpha}\boldsymbol{\varkappa}\vec{d}_{-\alpha} = N_j^{-2}\cos^2\theta + N_k^{-2}\sin^2\theta\,. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Рассмотрим частный случай, когда $\vec{d}_0$ ортогонален $\vec{\xi}_{02}$ и, следовательно, $\vec{d}_\alpha = \vec{\xi}_{02}$. По принятому соглашению при выборе индексов главных коэффициентов преломления применяются неравенства $N_1 > N_2 > N_3$ или $N_1 < N_2 < N_3$. Поэтому при изменении θ от 0 до $\pm 90°$ коэффициент преломления $n_{-\alpha}$ изменяется в интервале значений $\{N_1, N_3\}$. В соответствии с этими неравенствами должно существовать такое направление $\vec{d}_0$, ортогональное $\vec{\xi}_{02}$, при котором $n_{-\alpha} = N_2$ и, следовательно, $n_\alpha = n_{-\alpha}$. Это направление является оптической осью двуосной среды. Подставив во второе из соотношений (1.2.15) $n_{-\alpha} = N_2$, $N_j = N_1$, $N_k = N_2$ и решая полученное уравнение относительно θ, найдем, что оптическим осям отвечают углы $\theta = V$, где

$$\operatorname{tg} V = \pm\sqrt{\frac{N_2^{-2} - N_3^{-2}}{N_1^{-2} - N_2^{-2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 - N_2^2 N_3^{-2}}{N_2^2 N_1^{-2} - 1}}. \tag{1.2.16}$$

Решение (1.2.16) определяет ориентацию двух оптических осей двуосной среды.

Рассматривая полученные решения, несложно убедиться, что при пересечении вектором $\vec{d}_0$ оптической оси „быстрая“ и „медленная“ компоненты меняются местами. Если, например, при $|\theta| < |V|$ волна $\vec{d}_\alpha$ была „быстрой“, то для углов $|\theta| > |V|$ она становится „медленной“, поэтому меняет знак и параметр анизотропии $\Delta n = n_\alpha - n_{-\alpha}$. При формальном выборе индексов, когда для любых θ вектор $\vec{d}_\alpha$ сохраняет приписанное значение индекса, это обстоятельство не учитывается, что и является потенциальным источником возможных ошибок.

Если в группу симметрии кристалла входит поворотная ось порядка $r > 2$, то по теореме Германа [15] такая ось будет осью бесконечного порядка для всех материальных тензоров второго ранга этого кристалла. Тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ является тензором второго ранга и, следовательно, будет иметь ось симметрии бесконечного порядка, если соответствующий кристалл имеет ось 3, 4 или 6 порядков. В этом случае оптические свойства кристаллов должны быть инвариантны относительно любого поворота вокруг этой оси. Ось высокого порядка, поэтому, становится единственной оптической осью среды. В последнем случае принято ось $\vec{\xi}_{03}$ направлять вдоль оси симметрии высокого порядка, при этом $N_1 = N_2 = N_o$ — обыкновенный коэффициент преломлении среды, $N_3 = N_e$ — необыкновенный.

Поскольку из теоремы Германа следует инвариантность оптических свойств одноосной среды относительно поворотов вокруг оси $\vec{\xi}_{03}$ на произвольный угол, любое направление, ортогональное $\vec{\xi}_{03}$, является главным. Каким бы ни было направление волнового вектора $\vec{d}_0$ в одноосной среде, направление, ортогональное плоскости, в которой лежат вектор $\vec{d}_0$ и оптическая ось $\vec{\xi}_{03}$, будет главным. Поэтому для любого $\vec{d}_0$ применимо рассмотренное выше решение (1.2.15) в форме:

$$\begin{gathered} n_\alpha^{-2} = N_o^{-2}; \\ n_{-\alpha}^{-2} = N_o^{-2}\cos^2\theta + N_e^{-2}\sin^2\theta = N_o^{-2} + \left(N_e^{-2} - N_o^{-2}\right)\sin^2\theta, \end{gathered} \tag{1.2.17}$$

причем $\vec{d}_\alpha$ ортогонален плоскости, в которой лежит оптическая ось и вектор $\vec{d}_0$, а $\vec{d}_{-\alpha}$ — лежит в этой плоскости.

Из приведенных решений видно, что для плоскостей, ортогональных главным направлениям (они же являются и плоскостями симметрии тензора $\boldsymbol{\varkappa}$), решения уравнений (1.2.8), (1.2.9) существенно упрощаются прежде всего потому, что один из векторов поляризации волны, волновая нормаль которого ортогональна главному направлению, совпадает с этим направлением. Поэтому оказывается известным и весь собственный триплет волны — остается лишь рассчитать соответствующие коэффициенты преломления. Заметим, что разобранные частные варианты решений отвечают наиболее часто встречающимся случаям применения кристаллов. В главе 4 будет показано, почему варианты ориентации волн вдоль плоскостей симметрии следует рекомендовать для применения в акустооптике, как представляющие наибольший интерес.

Однако не следует полностью исключать из возможных вариантов использования кристаллов такие, когда направление нормали электромагнитной волны не совпадает с плоскостями симметрии тензора $\varkappa$. Формулы (1.2.10) – (1.2.13) в принципе представляют решения в наиболее общей формулировке задачи. Недостаток этих решений заключается в том, что в них входит трансцендентный параметр, определяемый уравнением (1.2.11).

Можно построить общее решение в иной форме, в которой векторы поляризации $\vec{d}_{\pm1}$ и коэффициенты преломления $n_{\pm1}$ представлены в явном виде как функции направляющих косинусов нормали $\vec{d}_0$ по отношению к оптическим осям. Такое представление общих решений удобно еще и потому, что направления оптических осей, как и осей главной системы координат среды, можно считать заданными.

Тензор диэлектрической непроницаемости $\varkappa$ (1.2.5), используя единичные векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_{-1}$, направленные по оптическим осям среды, можно переписать следующим образом:

$$\begin{gathered}\varkappa = N_2 + (1/2)\left(N_1^{-2} - N_3^{-2}\right)\left(\vec{c}_1\vec{\tilde{c}}_{-1} + \vec{c}_{-1}\vec{\tilde{c}}_1\right)\,;\\ \vec{c}_\alpha = \vec{\xi}_{01}\sqrt{\frac{N_1^{-2} - N_2^{-2}}{N_1^{-2} - N_3^{-2}}} + \alpha\vec{\xi}_{03}\sqrt{\frac{N_2^{-2} - N_3^{-2}}{N_1^{2} - N_3^{2}}}\,.\end{gathered} \tag{1.2.18}$$

Заметим, что из (1.2.18) следует: $\vec{\tilde{\xi}}_{03}\vec{c}_\alpha/\vec{\tilde{\xi}}_{01}\vec{c}_\alpha = \alpha\operatorname{tg}V$, совпадающее с соотношением (1.2.16). Вычисляя координаты тензора (1.2.18), убедимся в его идентичности тензору $\varkappa$ (1.2.5). Легко установить и нормировку векторов оптических осей: $\vec{\tilde{c}}_\alpha\vec{c}_\alpha = 1$.

Рассмотрим следующие векторы: $\vec{q}_{\pm\alpha} = \sin\theta_{-1}\ \vec{c}_1 \pm \sin\theta_1\ \vec{c}_{-1}$, где $\sin\theta_{\pm1} = \sqrt{1 - \left(\vec{\tilde{d}}_0\vec{c}_{\pm1}\right)^2}$, $\theta_{\pm1}$ — углы между волновой нормалью $\vec{d}_0$ и оптическими осями среды. Величина $\sin\theta_{\pm1}$ совпадает с длиной проекции вектора $\vec{c}_{\pm1}$ на плоскость, ортогональную нормали $\vec{d}_0$:

$$|\sin\theta_\beta| = |\mathbf{\Pi}_\perp\vec{c}_\beta| = \sqrt{\vec{\tilde{c}}_\beta\left(\mathbf{1} - \vec{d}_0\vec{\tilde{d}}_0\right)\vec{c}_\beta}\,;\qquad \beta = \pm1\,,$$

где $\mathbf{\Pi}_\perp = \mathbf{1} - \vec{d}_0\vec{\tilde{d}}_0$ — оператор (1.1.4) проекции на плоскость, перпендикулярную $\vec{d}_0$. Прямыми вычислениями можно показать, что выполнены следующие равенства

$$\begin{gathered}\vec{\tilde{q}}_\beta\mathbf{\Pi}_\perp^2\vec{q}_{-\beta} = \vec{\tilde{q}}_\beta\left(\mathbf{1} - \vec{d}_0\vec{\tilde{d}}_0\right)\vec{q}_{-\beta} = 0\,;\\ \vec{\tilde{q}}_\beta\mathbf{\Pi}_\perp\left(\vec{c}_1\vec{\tilde{c}}_{-1} + \vec{c}_{-1}\vec{\tilde{c}}_1\right)\mathbf{\Pi}_\perp\vec{q}_{-\beta} = 0\,,\end{gathered} \tag{1.2.19}$$

где $\beta = \pm\alpha$. Первое из этих равенств показывает, что проекции векторов $\vec{q}_\beta$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{d}_0$, ортогональны. Из равенства (1.2.19) следует также ортогональность этих проекций на тензоре $\varkappa$.

Сравнивая (1.2.19) с (1.2.9), видим, что векторы $\vec{d}'_\beta = \mathbf{\Pi}_\perp \vec{q}_\beta$ удовлетворяют уравнениям (1.2.9) и, следовательно, определяют направления собственных векторов поляризации. Однако эти векторы не нормированы. Произведем их нормировку и получим векторы поляризации $\vec{d}_\beta$ в таком виде:

$$\vec{d}_\beta = \vec{d}'_\beta \Big/ \sqrt{\tilde{\vec{d}}'_\beta \vec{d}'_\beta} = \left(\mathbf{1} - \vec{d}_0 \tilde{\vec{d}}_0\right) \vec{q}_\beta \Big/ \sqrt{\tilde{\vec{q}}_\beta \left(\mathbf{1} - \vec{d}_0 \tilde{\vec{d}}_0\right) \vec{q}_\beta} \ .$$

Коэффициенты преломления вычисляются по формуле $n_{\pm\alpha}^{-2} = \tilde{\vec{d}}_{\pm\alpha} \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_{\pm\alpha}$. Подставляя в нее нормированные векторы поляризации, находим:

$$n_{\pm\alpha}^{-2} = N_2^{-2} + (1/2)\left(N_3^{-2} - N_1^{-2}\right)\left[\cos 2V - \cos\left(\theta_1 \pm \theta_{-1}\right)\right] . \tag{1.2.20}$$

Как отмечалось выше, значение индекса α в (1.2.20) выбирается, исходя из соответствующих величин $n_{\pm\alpha}$: „быстрой“ волне (меньшее значение $n_{\pm\alpha}$) приписывается индекс $+1$. Выражая косинус угла между оптическими осями $\cos 2V$ через $\operatorname{tg} V$, легко преобразовать (1.2.20) следующим образом:

$$2n_{\pm\alpha}^{-2} = \left(N_3^{-2} + N_1^{-2}\right) + \left(N_3^{-2} - N_1^{-2}\right)\cos(\theta_1 \pm \theta_{-1}) . \tag{1.2.21}$$

До сих пор мы рассматривали лишь векторы $\vec{d}_\alpha$, определяющие направление вектора электрической индукции электромагнитной волны. Воспользовавшись соотношениями (1.2.4), несложно найти и остальные векторы электромагнитного поля. Вектор рефракции $\vec{n}_\alpha$ связан с нормалью $\vec{d}_0$ соотношением: $\vec{n}_\alpha = n_\alpha \vec{d}_0$. Из ортогональности собственного триплета $\vec{d}_{\pm1,0}$ и первого из уравнений (1.2.4) следует параллельность единичного вектора магнитного поля $\vec{h}_\alpha$ второму вектору поляризации $\vec{d}_{-\alpha}$.

Из равенства (1.2.9) вытекает ортогональность $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{h}_\alpha$, где $\vec{e}_\alpha$ — единичный вектор электрического поля. Действительно, $\tilde{\vec{h}}_\alpha \vec{e}_\alpha \sim \tilde{\vec{d}}_{-\alpha} \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha = 0$. Отсюда видно, что вектор $\vec{e}_\alpha$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{d}_0$, $\vec{d}_\alpha$ и ортогонален $\vec{d}_{-\alpha}$, $\vec{h}_\alpha$.

Ненормированный вектор $\vec{e}'_\alpha$ можно найти, применив единичный оператор, определенный относительно собственного триплета $\vec{d}_{\pm1,0}$.

$$\begin{gathered} \mathbf{1}\vec{e}'_\alpha = \left(\vec{d}_\alpha \tilde{\vec{d}}'_\alpha + \vec{d}_{-\alpha} \tilde{\vec{d}}_{-\alpha} + \vec{d}_0 \tilde{\vec{d}}_0\right) \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha = n_\alpha^{-2} \vec{d}_\alpha + \varkappa_{0\alpha} \vec{d}_0 \equiv \vec{e}'_\alpha ; \\ \vec{e}_\alpha = \vec{e}'_\alpha / |\vec{e}'_\alpha| = \left(\vec{d}_\alpha + n_\alpha^2 \varkappa_{0\alpha} \vec{d}_0\right) \Big/ \sqrt{1 + n_\alpha^4 \varkappa_{0\alpha}^2} \ . \end{gathered} \tag{1.2.22}$$

При выводе равенств (1.2.22) учтено, что $n_\alpha^{-2} = \tilde{\vec{d}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha$; $\tilde{\vec{d}}_{-\alpha} \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha = 0$; $\varkappa_{0\alpha} = \tilde{\vec{d}}_0 \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha$. Из (1.2.22) следует, что $\tilde{\vec{e}}_{-1} \vec{e}_1 \neq 0$. Таким образом, в отличие от векторов $\vec{d}_\alpha$, векторы $\vec{e}_\alpha$ не ортогональны. Этим объясняется то предпочтение, которое в кристаллооптике отдается первому из материальных уравнений (1.2.2).

Направление лучевой нормали $\vec{s}_\alpha$ в общем случае не совпадает с нормалью $\vec{d}_0$. Поскольку $\vec{s}_\alpha \parallel \vec{e}_\alpha{}^\times \vec{h}_\alpha$, то этот вектор должен быть ортогонален $\vec{h}_\alpha$. Поэтому $\vec{s}_\alpha$ компланарен векторам $\vec{e}_\alpha$, $\vec{d}_\alpha$, $\vec{d}_0$ и ортогонален $\vec{e}_\alpha$. Последнее условие требует, чтобы векторы $\vec{s}_\alpha$ и $\vec{d}_0$ образовывали тот же угол ψ_α, что и векторы $\vec{e}_\alpha$, $\vec{d}_\alpha$. Учитывая это условие, легко показать, что $\vec{s}_\alpha$ можно получить, переставив в (1.2.22) местами векторы $\vec{d}_\alpha$ и $\vec{d}_0$.

$$\vec{s}_\alpha = \left(\vec{d}_0 + n_\alpha^2 \varkappa_{0\alpha} \vec{d}_\alpha\right) \Big/ \sqrt{1 + n_\alpha^4 \varkappa_{0\alpha}^2} \,. \tag{1.2.23}$$

Таким образом, в общем случае лучевые нормали плоской электромагнитной волны $\vec{s}_\alpha$ и ее волновая нормаль $\vec{d}_0$ не совпадают. С этим связан широко известный эффект „сноса“ — отклонение лучей от волновой нормали, что в конечном итоге ведет к их относительному смещению в пространстве. Угол ψ_α и определяет величину сноса. Эффект сноса существенно влияет на работу акустооптических устройств. Используя (1.2.23), можно определить тангенс угла сноса:

$$\operatorname{tg}\psi_\alpha = n_\alpha^2 \varkappa_{0\alpha} \,. \tag{1.2.24}$$

Если вектор $\vec{d}_\alpha$ совпадает с главным направлением $\vec{\xi}_{0i}$, то собственным вектором тензора $\boldsymbol{\varkappa}$, как легко убедиться, будет и вектор $\vec{d}_0$, ортогональный $\vec{\xi}_{0i}$. В этом случае $\varkappa_{0\alpha} = 0$ и эффект сноса для такой волны отсутствует. Волны, не имеющие сноса, принято в кристаллооптике называть обыкновенными; волны, для которых $\psi_\alpha \neq 0$, — необыкновенными. Поскольку в одноосных средах одна из волн $\vec{d}_\alpha$ всегда поляризована вдоль главного направления, она является обыкновенной. Угол сноса для необыкновенной волны $\vec{d}_{-\alpha}$ в этом случае несложно вычислить, исходя из общего выражения (1.2.24) и (1.2.13)

$$\operatorname{tg}\psi_{-\alpha} = \frac{(N_e^2 - N_o^2)\sin\theta\cos\theta}{N_e^2\cos^2\theta + N_o^2\sin^2\theta} = \frac{(N_e^2 - N_o^2)\operatorname{tg}\theta}{N_e^2 + N_o^2\operatorname{tg}^2\theta} \,. \tag{1.2.25}$$

Следует заметить, что практически всегда выполнены неравенства $|N_i^2 - N_j^2| \ll N_k^2$, благодаря чему углы сноса световых пучков невелики и обычно не превышают нескольких градусов. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить расчетные соотношения для углов сноса.

Рассматривая (1.2.25) как функцию θ, можно найти значения θ, при которых $\psi_{-\alpha}$ достигает максимума: $\operatorname{tg}\theta = N_e/N_o$, при этом

$$\operatorname{tg}\psi_{-\alpha} = \left(N_e^2 - N_o^2\right)/2N_e N_o \,. \tag{1.2.26}$$

При анализе характеристик различных устройств важно не только знать конкретное значение коэффициентов преломления n_α для заданного $\vec{d}_0$, но и характер их изменения в окрестностях $\vec{d}_0$. Если $\left|\vec{\tilde{d}}_0' \left(\vec{d}_0' - \vec{d}_0\right)\right| \ll 1$, то при вычислении n_α', соответствующих направлению $\vec{d}_0'$, можно ограничиться первым приближением, в котором вектор $\vec{d}_0'$ представляется следующим образом: $\vec{d}_0' \simeq \vec{d}_0 + \Delta\theta_1 \vec{d}_1 + \Delta\theta_{-1}\vec{d}_{-1}$, при этом $\vec{d}_\alpha' \simeq \vec{d}_\alpha - \Delta\theta_\alpha \vec{d}_0$. Кроме указанных смещений векторов $\vec{d}_\alpha'$, они должны поворачиваться на некоторый угол вокруг $\vec{d}_0$. Однако, можно показать, что этот угол пропорционален $\Delta\theta_\alpha^2$, и им можно пренебречь при малых $\Delta\theta_\alpha$. Используя общее определение коэффициентов преломления (1.2.12), получим изменение значения коэффициентов преломления:

$$\begin{gathered} (n_\alpha')^{-2} \simeq \vec{\tilde{d}}_\alpha' \boldsymbol{\varkappa} \vec{d}_\alpha' = n_\alpha^{-2} - 2\varkappa_{0\alpha}\Delta\theta_\alpha \,, \\ n_\alpha' \simeq n_\alpha + n_\alpha^3 \varkappa_{0\alpha}\Delta\theta_\alpha = n_\alpha(1 + \Delta\theta_\alpha \operatorname{tg}\psi_\alpha) \,. \end{gathered} \tag{1.2.27}$$

Выражение (1.2.27) показывает, что изменение n_α в окрестностях вектора $\vec{d}_0$ зависит от угла сноса. Таким образом, существует тесная связь между величиной угла сноса и скоростью изменения коэффициентов преломления.

Вариант формулы (1.2.27) для случая одноосных сред легко получить, исходя из (1.2.17):

$$\begin{aligned} n'_{-\alpha} &\simeq n_{-\alpha} + n^3_{-\alpha} \left[\left(N_e^2 - N_o^2 \right) / N_e^2 N_o^2 \right] \sin 2\theta \, \Delta\theta \simeq \\ &\simeq n_{-\alpha} + (N_e - N_o) \sin 2\theta \, \Delta\theta \, . \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

В (1.2.28) учтено, что $|N_e^2 - N_o^2| \ll N_o^2$. Вблизи оптической оси $(\theta \to 0)$ линейная зависимость n'_α от $\Delta\theta$ исчезает, поэтому необходимо использовать квадратичное приближение:

$$\begin{aligned} n'_{-\alpha} &\simeq N_o + (1/2) N_o N_e^{-2} \left(N_o^2 - N_e^2 \right) \Delta\theta^2 \simeq \\ &\simeq N_o + (N_o - N_e) \Delta\theta^2 \, . \end{aligned} \tag{1.2.29}$$

Процесс распространения плоских электромагнитных волн в анизотропной среде можно интерпретировать как перенос фазы. Пусть в некоторой точке пространства с координатами $\vec{x}_0$, t_0 амплитуда плоской волны задана комплексным вектором $\vec{D}_0$, компоненты которого вдоль собственных направлений поляризации $D_{0\alpha} = \tilde{\vec{d}}_\alpha \vec{D}_0$. Воспользовавшись решениями (1.2.3), можно определить комплексные амплитуды в произвольной точке пространства

$$D_\alpha = D_{0\alpha} \exp \left\{ j \tilde{\vec{k}}_\alpha \left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right) - j\omega (t - t_0) \right\} \, .$$

Умножим это выражение слева на $\vec{d}_\alpha$ и просуммируем по $\alpha = \pm 1$. Поскольку $\vec{d}_\alpha D_{0\alpha} = \vec{d}_\alpha \tilde{\vec{d}}_\alpha \vec{D}_0$, $\sum \vec{d}_\alpha D_\alpha = \vec{D}$, получим:

$$\begin{gathered} \vec{D} = \boldsymbol{\tau} \vec{D}_0 = \left(\vec{d}_1 \tilde{\vec{d}}_1 \exp j\varphi_1 + \vec{d}_{-1} \tilde{\vec{d}}_{-1} \exp j\varphi_{-1} \right) \vec{D}_0 \, ; \\ \varphi_\alpha = \tilde{\vec{k}}_\alpha \left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right) - \omega (t - t_0) = (2\pi/\lambda) n_\alpha \tilde{\vec{d}}_0 \left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right) - \omega (t - t_0) \, . \end{gathered} \tag{1.2.30}$$

Формулы (1.2.30) определяют оператор переноса фазы $\boldsymbol{\tau}$, который ставит в соответствие заданной комплексной амплитуде $\vec{D}_0$ в точке с координатами $\vec{x}_0, t_0$ амплитуду $\vec{D}$ электромагнитной волны в произвольной точке анизотропной среды.

1.3 Плоские упругие волны в кристаллах

Поле вектора смещений $\vec{A}$ упругой волны должно удовлетворять уравнению эластодинамики [4, 15, 18]:

$$\tilde{\nabla} \mathbf{c} \, \nabla \vec{A} = \rho \left(\partial^2 / \partial t^2 \right) \vec{A} \, , \tag{1.3.1}$$

где ρ — плотность среды. Ядром уравнения (1.3.1) является тензор четвертого ранга адиабатических коэффициентов упругости:

$$\mathbf{c} = \sum_{i,j,k,l} c_{ijkl} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0j} \tilde{\vec{\xi}}_{0k} \tilde{\vec{\xi}}_{0l} \, . \tag{1.3.2}$$

Внутренняя симметрия тензора (1.3.2) в символах Яна [15] определяется как $[[V^2]^2]$. Тензоры с такой внутренней симметрией инвариантны относительно перестановок индексов $i \leftrightarrow j$ и $k \leftrightarrow l$, а также пар индексов $i,j \leftrightarrow k,l$. Коэффициенты упругости c_{ijkl} обычно заданы относительно той же главной системы координат, что и тензоры $\boldsymbol{\varkappa}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ (1.2.5).

Общее число координат тензора $\mathbf{c}$ составляет $3^4 = 81$. Однако из-за указанной внутренней симметрии максимальное количество линейно-независимых компонент не превышает 21 [15]. По этой причине в кристаллофизике часто вместо полного тензора (1.3.2) используют матрицу 6×6 с компонентами $c_{\mu\nu}$, к которой переходят с помощью замены индексов:

$$c_{\mu\nu} = c_{ijkl}\,; \quad i,j \leftrightarrow \mu\,; \quad k,l \leftrightarrow \nu\,; \quad \mu,\nu = \overline{1,6}\,,$$

где

$$\begin{aligned} &\mu = i \quad (\text{при } i = j)\,; && \mu = 9 - i - j \quad (\text{при } i \neq j)\,; \\ &\nu = k \quad (\text{при } k = l)\,; && \nu = 9 - k - l \quad (\text{при } k \neq l)\,. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Матрица $c_{\mu\nu}$ симметрична $(c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu})$. Такая матрица позволяет (в сравнении с полным тензором) существенно снизить общее число учитываемых компонент, что особенно важно при проведении конкретных расчетов, оформлении справочного материала и т.п. С другой стороны, при постановке и решении общих теоретических задач удобнее пользоваться тензором. Поэтому выбор формы представления коэффициентов упругости во многом зависит от конкретной задачи. В дальнейшем мы будем использовать как тензорное (1.3.2), так и матричное (1.3.3) представление упругих свойств кристаллов.

Собственными решениями уравнения (1.3.1) для неограниченной упругой среды являются плоские волны, поле векторов смещения которых может быть представлено функцией:

$$\vec{A} = \vec{a} A_0 \exp\left\{ j \left(\vec{\tilde{K}} \vec{x} - \Omega t \right) \right\}\,, \tag{1.3.4}$$

где A_0 — амплитуда волны; $\vec{K} = (2\pi/\Lambda)\,\vec{m}$ — ее волновой вектор; Λ, Ω — длина волны и циклическая частота, которые связаны с фазовой скоростью v соотношением: $\Omega\Lambda = 2\pi v$; $\vec{m}$ — волновая нормаль упругой волны $(\vec{\tilde{m}}\vec{m} = 1)$; $\vec{a}$ — нормированный вектор поляризации.

Подставляя в (1.3.1) функцию (1.3.4), получим основное уравнение теории упругих волн, известное под названием уравнения Кристоффеля

$$\vec{\tilde{m}} \mathbf{c} \vec{m} \vec{a} = \rho v^2 \vec{a}\,; \qquad \mathbf{M} \vec{a} = \rho v^2 \vec{a}\,. \tag{1.3.5}$$

Здесь $\mathbf{M} = \vec{\tilde{m}} \mathbf{c} \vec{m}$ — тензор Кристоффеля. Тензор $\mathbf{M}$ является симметричным тензором второго ранга. Уравнению (1.3.5) удовлетворяют три взаимно ортогональных вектора $\vec{a}_{\pm1,0}$, образующих собственный триплет поляризаций плоской упругой волны. Вторая форма записи уравнения Кристоффеля, по существу, имеет тот же вид, что и уравнение (1.1.10). Поэтому собственные векторы поляризации $\vec{a}_{\pm1,0}$, являющиеся решениями (1.3.5), могут быть интерпретированы как базис главной системы координат тензора $\mathbf{M}$, главные значения этого тензора $\rho v^2_{\pm1,0}$, определяемые по уравнению вида (1.1.11), связаны с фазовыми скоростями. В системе координат с базисом $\vec{a}_{\pm1,0}$ тензор $\mathbf{M}$ представлен канонической формой (1.1.12). Волновая нормаль $\vec{m}$ в общем случае не совпадает ни с одним из векторов $\vec{a}_{\pm1,0}$. Однако среди этих векторов всегда есть такой, который образует с нормалью $\vec{m}$ наименьший угол. Припишем этой волне индекс $\alpha = 0$. Волну, поляризованную вдоль $\vec{a}_0$, принято называть квазипродольной. Волны с поляризациями $\vec{a}_{\pm1}$ называют квазипоперечными (квазисдвиговыми). В дальнейшем условимся индекс $\alpha = +1$ приписывать „быстрой“ квазипоперечной волне, $\alpha = -1$ — „медленной“.

Из (1.3.5) следует, что фазовая скорость упругой волны определяется соотношением: $\rho v_\alpha^2 = \tilde{\vec{a}}_\alpha \tilde{\vec{m}} \mathbf{c} \vec{m} \vec{a}_\alpha$. Умножим левую и правую части этой формулы на $4\pi^2\Lambda^2$. Учитывая связь Λ, Ω, v, $\vec{K}$ и $\vec{m}$, получим: $\rho\Omega^2 = \tilde{\vec{a}}_\alpha \tilde{\vec{K}} \mathbf{c} \vec{K} \vec{a}_\alpha$. Групповая скорость упругой волны $\vec{v}_{гр,\alpha} = \nabla_K \Omega$, где дифференциальный оператор $\nabla_K = (\partial/\partial K_i)\vec{\xi}_i$ определен над полем волновых векторов $(\tilde{\nabla}_K \vec{K} = 1)$. Рассмотрим функцию $\nabla_K \rho\Omega^2$. После очевидных преобразований получим:

$$\vec{v}_{гр,\alpha} = (\rho\Omega)^{-1} \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{K} = (\rho v)^{-1} \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{m} \,. \tag{1.3.6}$$

Лучевая нормаль упругой волны $\vec{S}_\alpha$ параллельна $\vec{v}_{гр,\alpha}$. Поэтому, нормируя (1.3.6), находим лучевую нормаль

$$\vec{S}_\alpha = \frac{\tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{m}}{\sqrt{\tilde{\vec{m}} \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{m}}} \,. \tag{1.3.7}$$

Угол сноса Ψ_α упругой волны можно определить из соотношения $\cos\Psi_\alpha = \tilde{\vec{m}} \vec{S}_\alpha$.

$$\cos\Psi_\alpha = \rho v_\alpha^2 \left(\tilde{\vec{m}} \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{m} \right)^{-1/2} . \tag{1.3.8}$$

При выводе (1.3.8) учтено, что $\rho v_\alpha^2 = \tilde{\vec{m}} \tilde{\vec{a}}_\alpha \mathbf{c} \vec{a}_\alpha \vec{m}$.

Следует иметь в виду, что угол сноса упругих волн может достигать иногда десятков градусов, что существенно больше сноса световых волн. Вообще акустическая анизотропия кристаллов проявляется значительно сильнее, чем оптическая.

Перенос фазы упругих волн можно определить с помощью оператора, аналогичного оператору переноса фазы электромагнитных волн (1.2.30). Используя эту аналогию, запишем

$$\begin{aligned} &\vec{A} = \mathbf{T}\vec{A}_0 = \sum_\alpha \left(\vec{a}_\alpha \tilde{\vec{a}}_\alpha \exp j\Phi_\alpha \right) \vec{A}_0 \,; \qquad \alpha = \pm1, 0 \,; \\ &\Phi_\alpha = \tilde{\vec{K}}_\alpha (\vec{x} - \vec{x}_0) - \Omega(t - t_0) = (2\pi/\Lambda_\alpha) \tilde{\vec{m}} (\vec{x} - \vec{x}_0) - \Omega(t - t_0) \,. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

В акустооптике связь электромагнитной и упругой волны, устанавливающаяся за счет упругооптического эффекта, обычно определяется с помощью поля упругих деформаций. В приближении малых упругих деформаций тензор деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ связан с вектором смещений упругой волны $\vec{A}$ уравнением [15, 18]:

$$\boldsymbol{\gamma} = (1/2) \left(\nabla \vec{A} + \vec{A} \nabla \right) . \tag{1.3.10}$$

В слагаемом $\vec{A}\nabla$ дифференциальный оператор действует на стоящий слева от него вектор смещений $\vec{A}$; образующийся в результате дифференцирования вектор $\vec{K}$ должен быть расположен справа от $\vec{A}$. Подставим (1.3.4) в (1.3.10) и, используя нормировку $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'\boldsymbol{\gamma}' = \mathbf{1}$, получим нормированный тензор деформаций плоской упругой волны

$$\boldsymbol{\gamma}'_\alpha = (1/2)\,(\vec{m}\vec{a}_\alpha + \vec{a}_\alpha\vec{m})\ . \tag{1.3.11}$$

Тензор $\boldsymbol{\gamma}'_\alpha$ — симметричный ковариантный тензор. Координаты тензора в главной системе координат среды $\vec{\xi}_{0i}$ равны $\gamma'_{\alpha ij} = \tilde{\vec{\xi}}_{0i}\vec{\xi}_{0j}\boldsymbol{\gamma}'_\alpha$. Они образуют симметричную матрицу 3×3 $(\gamma'_{\alpha ij} = \gamma'_{\alpha ji})$. Это обстоятельство часто используют для перехода от матрицы $\gamma'_{\alpha ij}$ к шестикомпонентному вектору-матрице $\gamma'_{\alpha\lambda}$ [15]:

$$\begin{aligned} \gamma'_{\alpha ij} &\leftrightarrow \gamma'_{\alpha\lambda}\,; \qquad \lambda = i \quad (\text{при } i = j\ )\,; \\ 2\gamma'_{\alpha ij} &\leftrightarrow \gamma'_{\alpha\lambda}\,; \qquad \lambda = 9 - i - j \quad (\text{при } i \neq j)\,. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Шестикомпонентную форму представления поля деформации мы в дальнейшем будем использовать наряду с тензором (1.3.11).

Приведенные выше выражения определяют основные параметры упругих волн. В отличие от теории электромагнитных волн, в рамках которой, как было показано в § 1.2, удается построить в явном виде самые общие решения, связывающие векторы собственного триплета поляризаций плоской волны, коэффициент преломления и другие параметры с функцией направления (волновой нормалью), в теории упругих волн в кристаллах в настоящее время не удается выделить связь аналогичных параметров с волновой нормалью при общей постановке задачи.

Сравнивая два тензора второго ранга $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\mathbf{M}$, роли которых в определении параметров распространения соответствующих волн сходны, можно заметить и существенное различие. Главная система координат тензора $\boldsymbol{\varkappa}$ (базис $\vec{\xi}_{0i}$) фиксирована относительно кристаллографических осей и, за исключением низших кристаллографических сингоний [15], не зависит от внешнего воздействия. Базис главной системы координат тензора Кристоффеля $\mathbf{M} = \tilde{\vec{m}}\mathbf{c}\vec{m}$ (векторы $\vec{a}_{\pm1,0}$), напротив, подвижен и существенно зависит от направления волновой нормали $\vec{m}$. Эта зависимость определяется уравнениями вида (1.1.10), на основании которых не удается выделить в явном виде функциональную связь $\vec{a}_{\pm1,0}$, а следовательно и остальных параметров: v_α, $\vec{S}_\alpha$ и т. п. с $\vec{m}$.

Строго говоря, от направления волны зависят оба триплета $\vec{d}_{\pm1,0}$ и $\vec{a}_{\pm1,0}$. Однако, из-за поперечности электромагнитных волн собственные поляризации двух электромагнитных волн $\vec{d}_{\pm1}$ всегда ортогональны волновой нормали $\vec{d}_0$ и их ориентация зависит от тензора $\boldsymbol{\varkappa}$ с фиксированной главной системой координат, поэтому связь $\vec{d}_{\pm1}$ с $\vec{d}_0$ относительно проста. Функциональная связь $\vec{a}_{\pm1,0}$ и $\vec{m}$ значительно сложнее, что существенно затрудняет не только расчет конкретных вариантов, но и правильную интерпретацию найденных решений.

Можно показать, что многие трудности, могут быть преодолены при последовательном использовании такого важного свойства кристаллов, как симметрия.

Тензор Кристоффеля $\mathbf{M}$ (1.3.5) можно рассматривать как результат свертки тензора упругих коэффициентов $\mathbf{c}$ с диадой $\vec{m}\tilde{\vec{m}}$. Рассмотрим прежде всего симметрию диады $\vec{m}\tilde{\vec{m}}$ [15]. Направление оси этой диады, очевидно, является поворотной осью бесконечно высокого порядка. Любая плоскость, проходящая через ось бесконечно высокого порядка, является плоскостью симметрии. Кроме того $\vec{m}\vec{\vec{m}}$ не зависит от знака $\vec{m}$, поэтому плоскостью симметрии является и плоскость, ортогональная $\vec{m}$. Таким образом, в группу симметрии диады $\vec{m}\vec{\vec{m}}$ входит $\infty\, m/m$.

В группе симметрии тензора $\mathbf{c}$ нас должны интересовать плоскости симметрии. Заметим, что по принципу Кюри–Неймана группа точечной симметрии кристалла целиком входит как подгруппа в группу симметрии всех материальных тензоров этого кристалла, в том числе, конечно, и тензора $\mathbf{c}$. Однако материальные тензоры могут иметь и элементы симметрии, которые отсутствуют у соответствующего кристалла. В частности тензоры с внутренней симметрией $[[V^2]^2]$, к числу которых относится и $\mathbf{c}$, имеют центр симметрии. Сочетание оси симметрии четного порядка и центра симметрии порождает ортогональную этой оси плоскость симметрии. Плоскость симметрии и центр симметрии порождают ось второго порядка. Таким образом, в группе симметрии тензора $\mathbf{c}$ всегда есть подгруппа $2/m$, если среди элементов симметрии кристалла есть ось четного порядка или плоскость симметрии.

В группу симметрии тензора Кристоффеля $\mathbf{M}$ войдут те элементы симметрии, которые являются пересечением группы симметрии $\mathbf{c}$ и $\vec{m}\vec{\vec{m}}$. Иными словами, симметрию $\mathbf{M}$ будут определять только элементы, общие для $\mathbf{c}$ и $\vec{m}\vec{\vec{m}}$. Перебирая возможные варианты ориентации $\vec{m}\vec{\vec{m}}$ относительно подгруппы $2/m$ тензора $\mathbf{c}$, можно заметить, что подгруппы $\infty\, m/m$ и $2/m$ будут иметь общую плоскость симметрии, если $\vec{m}\vec{\vec{m}} \parallel 2$ или $\vec{m}\vec{\vec{m}} \parallel m$, т.е. вектор $\vec{m}$ направлен вдоль оси второго порядка или лежит в плоскости симметрии m. Эта ориентация $\vec{m}$ и указывает на те условия, при которых $\mathbf{M}$ будет иметь плоскость симметрии.

Пусть $\vec{\xi}_i$ — базис некоторой системы координат, причем $\vec{\xi}_3$ — нормаль к плоскости симметрии. Среди компонент тензора $M_{ij} = \vec{\vec{\xi}}_i \mathbf{M} \vec{\xi}_j$ выделим $M_{13} = M_{31}$ и $M_{23} = M_{32}$. Эти компоненты, в частности, не должны изменяться при отражении относительно плоскости симметрии m, что фактически означает независимость от знака $\vec{\xi}_3$. Поэтому, например, $\vec{\vec{\xi}}_3 \mathbf{M} \vec{\xi}_1 = -\vec{\vec{\xi}}_3 \mathbf{M} \vec{\xi}_1$, т.е. $M_{31} = -M_{31} = 0$. Аналогично получим $M_{32} = 0$. Равенство $M_{31} = M_{32} = 0$ является необходимым и достаточным условием того, что $\vec{\xi}_3$ совпадает с главной осью $\mathbf{M}$.

Таким образом, если тензор Кристоффеля $\mathbf{M}$ имеет плоскость симметрии, то нормаль к ней является его главной осью и совпадает с одним из векторов $\vec{a}_\alpha$. Направления двух других векторов $\vec{a}_\beta$ и $\vec{a}_\gamma$ $(\alpha \neq \beta \neq \gamma)$ в этом случае легко вычисляются. Представим $\vec{a}_\beta$ и $\vec{a}_\gamma$ через векторы $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$:

$$\vec{a}_\beta = \vec{\xi}_1 \cos\theta + \vec{\xi}_2 \sin\theta\,; \qquad \vec{a}_\gamma = -\vec{\xi}_1 \sin\theta + \vec{\xi}_2 \cos\theta\,. \tag{1.3.13}$$

Используя уравнение $\vec{\vec{a}}_\beta \mathbf{M} \vec{a}_\gamma = 0$, легко находим

$$\operatorname{tg} 2\theta = 2M_{12}/(M_{11} - M_{22})\ , \tag{1.3.14}$$

где $M_{ij} = \vec{\vec{\xi}}_i \mathbf{M} \vec{\xi}_j = \vec{\vec{\xi}}_i \vec{\vec{m}} \mathbf{c} \vec{m} \vec{\xi}_j$.

Конкретные значения индексов α, β, γ в решениях (1.3.13), (1.3.14) выбираются, исходя из частных особенностей задачи. Например, если $\vec{m}$ ортогонален плоскости симметрии, то $\vec{m} = \vec{a}_\alpha = \vec{a}_0$. Таким образом, если волновая нормаль упругой волны $\vec{m}$ перпендикулярна плоскости симметрии, то она является чисто продольной волной. Две другие волны с поляризациями $\vec{a}_{\pm 1}$ будут чисто поперечными, или сдвиговыми. Сказанное позволяет сформулировать важный практический результат, впервые полученный Ф. И. Федоровым [18]: направления, ортогональные плоскостям симметрии тензора упругости $\mathbf{c}$, являются продольными акустическими нормалями.

При ориентации $\vec{m}\vec{\bar{m}} \parallel m$ вектор $\vec{a}_\alpha$ (нормальный к плоскости m) из-за ортогональности $\vec{a}_\alpha$ и $\vec{m}$ отвечает чисто поперечной волне. Два оставшихся вектора поляризации: $\vec{a}_{-\alpha}$ и $\vec{a}_0$ принадлежат в общем случае квазипоперечной и квазипродольной волнам. Выбор конкретного значения индекса α зависит от типа поперечной волны: быстрая она или медленная. Мы видим, что любое направление в плоскости симметрии m является поперечной акустической нормалью для волны, поляризованной ортогонально m. При этом фазовая скорость поперечной упругой волны не зависит от направления волны.

Заметим, что чисто поперечные и продольные упругие волны являются обыкновенными, для которых эффект сноса отсутствует.

1.4 Упругооптический эффект

В акустооптических средах электромагнитные и упругие волны параметрически связаны. Функциональную связь этих волн обычно называют упругооптическим эффектом, который заключается в зависимости тензора диэлектрической непроницаемости $\boldsymbol{\varkappa}$ от параметров упругой волны. Возможны варианты феноменологической теории упругооптического эффекта, когда зависящим от упругой волны считается тензор $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Теорию различных параметрических эффектов, в том числе и упругооптического, формулируют как феноменологическую, или описательную. При таком подходе эффект определен с помощью соответствующего материального тензора, координаты которого относительно некоторой системы координат находятся экспериментально.

Зависимость $\boldsymbol{\varkappa}$ от $\boldsymbol{\gamma}$ можно рассматривать как слабую, так как относительное изменение коэффициентов преломления обычно составляет 10^{-4}–10^{-5}. Это позволяет положить в основу определения материального тензора упругооптического эффекта разложение тензора $\boldsymbol{\varkappa}(\gamma)$ в ряд Маклорена.

$$\boldsymbol{\varkappa}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\nabla^{2n} \boldsymbol{\varkappa}_0\right) \boldsymbol{\gamma}^n . \qquad (1.4.1)$$

Тензор $(1/n!)\nabla^{2n}\boldsymbol{\varkappa}_0 = \mathbf{p}^{(n)}$ является тензором $2(n+1)$-го ранга. Он называется тензором упругооптического эффекта n-го порядка. Используя тензоры $\mathbf{p}^{(n)}$, (1.4.1) можно переписать следующим образом:

$$\boldsymbol{\varkappa}(\gamma) = \boldsymbol{\varkappa}_0 + \mathbf{p}^{(1)}\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{p}^{(2)}\boldsymbol{\gamma}^2 + \dots . \qquad (1.4.2)$$

Квадратичная составляющая $\mathbf{p}^{(2)}$ вносит в эффект незначительный вклад, экспериментально пока не обнаруженный. Еще слабее влияние кубического и других членов высокого порядка. Поэтому достаточно в (1.4.2) ограничиться двумя членами, учитывая лишь линейное приближение:

$$\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\varkappa}_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}\,. \tag{1.4.3}$$

Тензор упругооптических коэффициентов является тензором четвертого ранга

$$\mathbf{p} = \sum_{i,j,k,l} p_{ijkl}\vec{\xi}_{0i}\vec{\xi}_{0j}\vec{\vec{\xi}}_{0k}\vec{\vec{\xi}}_{0l}\,. \tag{1.4.4}$$

Внутренняя симметрия тензора $\mathbf{p}$ в символах Яна $[[V^2]^2]$ совпадает с внутренней симметрией тензора $\mathbf{c}$ (1.3.2). Этот тензор инвариантен относительно перестановок индексов $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow l$, $i,j \leftrightarrow k,l$. Так же, как и в случае с тензором $\mathbf{c}$, в практических расчетах часто вместо тензора (1.4.4) используют матрицу упругооптических коэффициентов $p_{\mu\nu}$, которая пересчитывается по формулам (1.3.3). Совместно с матрицей $p_{\mu\nu}$ в расчетах используют представление тензора деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в виде шестикомпонентного вектора-матрицы (1.3.12).

Нормированное поле деформаций упругой волны определяется формулой (1.3.11), подставив которую в (1.4.3), получим:

$$\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\varkappa}_0 + A_0\mathbf{p}\vec{m}\vec{a}\,, \tag{1.4.5}$$

где $\vec{a}$ — вектор поляризации упругой волны; A_0 — амплитуда вектора смещений. Тензор $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma})$ имеет ковариантное представление.

В средах с достаточно высокой оптической анизотропией, как было показано в [4, 15, 22], ощутимый вклад в упругооптический эффект, наряду с линейными деформациями, учитываемыми тензором $\boldsymbol{\gamma}$ (1.3.10), вносят малые вращательные деформации. За счет локальных вращательных деформаций могут изменить ориентацию главные оси среды и, как следствие, собственные направления поляризации электромагнитной волны. Возникает дополнительный, пропорциональный локальному углу поворота $\Delta\beta$ и разнице коэффициентов преломления $n_{-1} - n_1$ сдвиг фаз между быстрой и медленной компонентами электромагнитной волны. Поскольку эффект, связанный с локальными вращательными деформациями, зависит от $n_{-1} - n_1$, он может наблюдаться только на фоне достаточно высокой естественной анизотропии.

С учетом локальных вращательных деформаций координаты упругооптического тензора

$$p'_{ijkl} = p_{ijkl} + q_{ij(kl)}\,,$$

где $q_{ij(kl)}$ — коэффициенты, учитывающие малые повороты. Тензор $\mathbf{q}$ антисимметричен по индексам k, l: $q_{ij(kl)} = -q_{ij(lk)}$. В символах Яна его симметрия $[V^2]V$ [15]. Тензор $\mathbf{p}'$ теряет симметрию относительно перестановок $i,j \leftrightarrow k,l$, матрица $p_{\mu\nu}$ — перестановок $\mu \leftrightarrow \nu$.

В настоящее время данных по величине коэффициентов $q_{ij(kl)}$ почти нет. Однако, в [4] показано, что для кристаллов рутила и кальцита вклад членов $q_{ij(kl)}$ в упругооптический эффект достаточно велик.

Коэффициенты, определяющие конкретную связь параметров распространения электромагнитной волны с полем деформаций упругой волны, могут быть определены только на основе соответствующих дифракционных уравнений. Однако первым этапом расчета акустооптического взаимодействия является определение эффективной упругооптической постоянной $p_э$, связывающей изменения коэффициентов преломления и повороты собственных осей среды, вызванные упругой волной, с амплитудой этой волны.

При расчете $p_э$ удобнее использовать тензор диэлектрических непроницаемостей в ковариантной форме (1.4.5):

$$\boldsymbol{\varkappa}_0 = \sum_i N_i^{-2} \vec{\xi}_{0i} \vec{\xi}_{0i} \,. \tag{1.4.6}$$

Поскольку в результате действия поля упругих деформаций тензор $\boldsymbol{\varkappa}$ изменяется, в общем случае должны измениться направления собственных векторов поляризации $\vec{d}_{\pm 1}$ и соответствующие им коэффициенты преломления $n_{\pm 1}$ электромагнитной волны. Естественно, что за исходный базис, по отношению к которому определяются измененные параметры, следует взять собственный триплет $\vec{d}_{\pm 1,0}$ электромагнитной волны в отсутствие возмущения $(A_0 = 0)$.

Представим тензор $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma})$ (1.4.3) в виде:

$$\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\varkappa}_0 + \Delta\boldsymbol{\varkappa} ; \qquad \Delta\boldsymbol{\varkappa} = A_0 \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}' \sin\left(\vec{K}\vec{x} - \Omega t\right), \tag{1.4.7}$$

где $\Delta\boldsymbol{\varkappa}$ — наведенная упругой волной анизотропия среды.

Электромагнитная волна является поперечной в любой среде, где нет свободных зарядов, в том числе и в возмущенной упругой волной. По этой причине измененные векторы $\vec{d}_{\pm 1}$ должны лежать в одной плоскости с $\vec{d}^{\,0}_{\pm 1}$. Следовательно, под действием упругой волны они могут лишь повернуться на некоторый угол β по отношению к $\vec{d}^{\,0}_{\pm 1}$. Поэтому

$$\vec{d}_{\pm\alpha} = \vec{d}^{\,0}_{\alpha} \cos\beta + \alpha \vec{d}^{\,0}_{-\alpha} \sin\beta \,. \tag{1.4.8}$$

Уравнения (1.2.9) верны и по отношению к возмущенным средам. Поэтому, подставив в уравнение $\vec{\tilde{d}}_\alpha \vec{\tilde{d}}_{-\alpha} \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ значения $\vec{d}_\alpha$, определяемые (1.4.8), получим

$$(\alpha/2)[\varkappa_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\gamma}) - \varkappa_{-\alpha,-\alpha}(\boldsymbol{\gamma})] \sin 2\beta - \varkappa_{\alpha,-\alpha}(\boldsymbol{\gamma}) \cos 2\beta = 0 \,, \tag{1.4.9}$$

где $\varkappa_{\alpha\beta} = \vec{\tilde{d}}^{\,0}_{\alpha} \vec{\tilde{d}}^{\,0}_{\beta} \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma})$ вычисляются относительно невозмущенных векторов. Из (1.4.7) следует, что $\varkappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\gamma}) = \varkappa_{\alpha\beta} + \Delta\varkappa_{\alpha\beta}$. Учтем также, что $\vec{d}^{\,0}_{\pm 1}$ являются решениями невозмущенных уравнений (1.2.8), (1.2.9), поэтому $\varkappa_{-\alpha,\alpha} = 0$, $\varkappa_{\alpha\alpha} = n_{0\alpha}^{-2}$. Это позволяет преобразовать (1.4.9) следующим образом:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \alpha \, \frac{2\Delta\varkappa_{1,-1}}{n_{01}^{-2} - n_{0,-1}^{-2} + \Delta\varkappa_{11} - \Delta\varkappa_{-1,-1}} \,, \tag{1.4.10}$$

где выбор знака зависит от α.

Возмущенные значения коэффициентов преломления определяются с помощью той же формулы (1.2.8), что и невозмущенные $n_\alpha^{-2} = \vec{\tilde{d}}_\alpha \vec{\tilde{d}}_\alpha \boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma})$. Подставляя в это выражение (1.4.8), получим

$$n_\alpha^{-2} = n_{0\alpha}^{-2} + \Delta\varkappa_{\alpha\alpha} \cos^2\beta + \Delta\varkappa_{-\alpha,-\alpha} \sin^2\beta + \alpha \Delta\varkappa_{\alpha,-\alpha} \sin 2\beta \,. \tag{1.4.11}$$

Таким образом, вычислив по формуле (1.4.10) угол поворота $\vec{d}_{\pm 1}$, мы можем затем рассчитать и векторы (1.4.8), и коэффициенты преломления $n_{\pm 1}$ (1.4.11).

Можно показать, воспользовавшись (1.4.11), что условию одновременного обращения в нуль числителя и знаменателя (1.4.10) отвечает направление, совпадающее с наведенной оптической осью среды, возмущенной полем упругих деформаций.

Если среда обладает естественной анизотропией и волновая нормаль образует с ее оптическими осями достаточно большие углы (обычно больше 3–5°), то можно считать выполненным неравенство $n_{01}^{-2} - n_{0,-1}^{-2} \gg |\Delta\varkappa_{11} - \Delta\varkappa_{-1,-1}|$. В этом случае угол β является малым:

$$\beta \simeq \Delta\varkappa_{1,-1} \big/ \left(n_{01}^{-2} - n_{0,-1}^{-2}\right) = -n_{01}^2 n_{0,-1}^2 \Delta\varkappa_{1,-1} \big/ \left(n_{01}^2 - n_{0,-1}^2\right) , \tag{1.4.12}$$

что позволяет существенно упростить (1.4.11):

$$\begin{aligned} &n_\alpha^{-2} = n_{0\alpha}^{-2} + \Delta\varkappa_{\alpha\alpha}\,; \\ &n_\alpha \simeq n_{0\alpha} - (1/2) n_{0\alpha}^3 \Delta\varkappa_{\alpha\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

Если нормаль $\vec{d}_0$ близка к оптической оси среды, углы поворота β собственных векторов поляризации существенно возрастают, а при совпадении $\vec{d}_0$ с оптической осью $(n_1 = n_{-1})$ ориентация $\vec{d}_{\pm 1}$ определяется только упругими деформациями.

В главах 2, 3 будет показано, что изотропная дифракция света связана с изменением коэффициента преломления среды под действием упругой волны, анизотропная — с поворотом собственных векторов поляризации. Рассматривая (1.4.12) и (1.4.13), можно заметить, что изменение показателя преломления пропорционально $\Delta\varkappa_{\alpha\alpha}$, а угол поворота собственных векторов поляризации β пропорционален $\Delta\varkappa_{\alpha,-\alpha}$.

Запишем компоненты $\Delta\varkappa_{\alpha\beta}$ через тензор упругооптических коэффициентов:

$$\Delta\varkappa_{\alpha\beta} = A_0 \vec{\tilde{d}}_\alpha^{\,0} \vec{\tilde{d}}_\beta^{\,0} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a} \sin\left(\vec{\tilde{K}}\vec{x} - \Omega t\right) = A_0 p_э \sin\left(\vec{\tilde{K}}\vec{x} - \Omega t\right). \tag{1.4.14}$$

Формула (1.4.14) в общем виде определяет эффективную упругооптическую постоянную

$$p_э = \vec{\tilde{d}}_\alpha^{\,0} \vec{\tilde{d}}_\beta^{\,0} \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}' = \vec{\tilde{d}}_\alpha^{\,0} \vec{\tilde{d}}_\beta^{\,0} \mathbf{p} \vec{m} \vec{a}\,. \tag{1.4.15}$$

Выражение (1.4.15) показывает, что эффективная фотоупругая постоянная является сверткой трех тензоров. Первый из них — тензор, образованный произведением контрвариантных векторов $\vec{\tilde{d}}_\alpha^{\,0}$ и $\vec{\tilde{d}}_\beta^{\,0}$, второй — смешанный тензор упругооптических коэффициентов $\mathbf{p}$, а третий — ковариантный нормированный тензор деформаций $\boldsymbol{\gamma}'$. Записывая коэффициенты всех этих тензоров относительно базиса $\vec{\xi}_{0i}$ и переходя к матричному представлению, получим выражение для эффективной фотоупругой постоянной в матричном представлении:

$$p_э = \sum_{\mu,\nu=1}^{6} d_\mu p_{\mu\nu} \gamma'_\nu\,, \tag{1.4.16}$$

где $d_\mu = \vec{\tilde{d}}_\alpha^{\,0} \vec{\xi}_{0i} \vec{\tilde{d}}_\beta^{\,0} \vec{\xi}_{0j}\,; \quad \mu = i \quad (i = j); \quad \mu = 9 - i - j \quad (i \neq j)\,.$

Формулы (1.4.15), (1.4.16), определяющие эффективную упругооптическую постоянную, получены здесь в статическом приближении, поэтому вошедшие в (1.4.15), (1.4.16) векторы поляризации относятся к одной и той же волне.

Но из уравнений дифракции, анализируемых в последующих главах, следует, что в выражения, определяющие $p_э$, должны войти параметры двух волн: падающей и дифрагировавшей. По этой причине в (1.4.15), (1.4.16) векторы $\vec{d}_\alpha^0$ и $\vec{d}_\beta^0$ следует считать принадлежащими разным волнам.

Мы нашли $p_э$, исходя из принятого в кристаллофизике определения упругооптического эффекта, как изменения тензора $\boldsymbol{\varkappa}$. Однако в главе 3 уравнения дифракции рассматриваются для случая, когда изменяющейся под действием внешней силы функцией считается тензор диэлектрических проницаемостей $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Рассмотрим связь между этими двумя способами учета внешнего воздействия на анизотропную среду. Фундаментальным требованием совместимости уравнений Максвелла и дополняющих их материальных уравнений, является взаимность тензоров $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\gamma})$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\gamma})$:

$$(\boldsymbol{\varkappa} + \Delta\boldsymbol{\varkappa})(\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varkappa}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varkappa\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varkappa}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1}\,. \tag{1.4.17}$$

Ограничимся в (1.4.17) линейным приближением: $\boldsymbol{\varkappa}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = -\Delta\boldsymbol{\varkappa\varepsilon}$. Умножим это выражение слева на $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\varepsilon}\Delta\boldsymbol{\varkappa\varepsilon}\,. \tag{1.4.18}$$

В главной системе координат $\vec{\xi}_{0i}$ (1.4.18) можно записать следующим образом:

$$\Delta\varepsilon_{ij}\vec{\xi}_{0i}\vec{\tilde{\xi}}_{0j} = \sum_{i',j',\dots} N_i^2\vec{\xi}_{0i}\vec{\tilde{\xi}}_{0j}\Delta\varkappa_{i'j'}\vec{\xi}_{0i'}\vec{\tilde{\xi}}_{0j'}N_{j''}^2\vec{\xi}_{0i''}\vec{\xi}_{0j''}.$$

Учитывая ортогональность векторов $\vec{\xi}_{0i}$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{i,j}\Delta\varepsilon_{ij}\vec{\xi}_{0i}\vec{\tilde{\xi}}_{0j} = -\sum_{i,j}N_i^2N_j^2\Delta\varkappa_{ij}\vec{\xi}_{0i}\vec{\tilde{\xi}}_{0j}\,;\\ \Delta\varepsilon_{ij} = -N_i^2N_j^2\Delta\varkappa_{ij}\,.\end{gathered} \tag{1.4.19}$$

С помощью соотношения (1.4.19) можно легко переходить от $\Delta\varepsilon_{ij}$ к $\Delta\varkappa_{ij}$ и обратно.